90學年下學期微甲一組期末考

1. 一條密度不均勻的纜線, 其曲線為 $\overrightarrow{\gamma}(t) = (0, t^2-1, 2t)$, $0 \le t \le 1$。該纜線的線密度 $\delta(x,y,z) = \sqrt{y+2}$。求纜線的質量中心。

2. 向量場 $\overrightarrow{F}(x,y) = (x,y)$, 曲線 C 為橢圓 $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$。用線積分的定義直接計算 $\displaystyle\int_C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\ ds$ 與 $\displaystyle\int_C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{T}\ ds$ 之值。其中, $\overrightarrow{n}$ 表橢圓 C 上的往外單位法向量, $\overrightarrow{T}$ 為沿橢圓 C 逆時針方向前進時的單位切向量。

3. 令向量場 $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (e^x \cos y + yz, xz - e^x \sin y + 1, xy + e^z)$, C 為由 $(1,0,1)$ 到 $(1,\pi,3)$ 的有向線段。

   (a) 求 $\overrightarrow{F}$ 的位能函數。

   (b) 求 $\displaystyle\int_C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{T}\ ds$ 之值。

4. 令向量場 $\overrightarrow{F}(x,y) = (y\sin(x^2y^2) - y, x\sin(x^2y^2) + x)$, C_1 為由 $(2,0)$ 經 $(0,0)$ 到 $(0,2)$ 的有向折線, C_2 為由 $(2,0)$ 出發, 沿圓 $x^2+y^2=4$ 逆時針前進到 $(0,2)$ 的有向曲線。

   (a) 求 $\displaystyle\int_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{T}\ ds$ 之值。

   (b) 求 $\displaystyle\int_{C_2} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{T}\ ds$ 之值。

5. 令 C 為橢圓 $2x^2+3y^2=1$, 逆時針方向前進, 向量場 $\overrightarrow{F}(x,y) = \left(\dfrac{x^2+y^2-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x^2+y^2+x}{x^2+y^2}\right)$。求 $\displaystyle\int_C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{T}\ ds$ 之值。注意, 原點不在 $\overrightarrow{F}$ 的定義域內。

6. 求圓柱 $x^2+y^2=2x$ 被球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 所截部分之面積。

7. 設 $\overrightarrow{u} = (a,b,c)$ 為單位向量, 在平面 $ax+by+cz=0$ 上以原點為圓心的單位圓用 C 表示, C 與 $\overrightarrow{u}$ 的指向成一右手系。令 $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (3y-2z, x+2z, 2x-y)$,

   (a) 求 $\displaystyle\int_C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{T}\ ds$。

   (b) 問 $\overrightarrow{u}$ 為哪一方向時, $\displaystyle\int_C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{T}\ ds$ 最大? 最大值又是多少?

8. 設向量場 $\overrightarrow{F}(x,y,z) = \left(\dfrac{x^3}{a^2}, \dfrac{y^3}{b^2}, \dfrac{z^3}{c^2}\right)$, 求 $\displaystyle\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\ d\sigma$ 之值, 其中 S 為橢球面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $\overrightarrow{n}$ 為橢球面上的往外單位法向量。

9. 求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 在第一卦限 $(x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0)$ 之部分的形心。

10. 設向量場 $\overrightarrow{F}(x,y,z) = \big(y, x^2, (x^2+y^4)^{3/2}\sin(e^{\sqrt{xyz}})\big)$, S 為半個橢球面 $4x^2+9y^2+36z^2=36$, $z \geq 0$。求 $\displaystyle\iint_S (\nabla \times \overrightarrow{F}) \cdot \overrightarrow{n}\ d\sigma$ 之値, 其中 $\overrightarrow{n}$ 為橢球面指向外側的單位法向量。