微乙小考三 (2019/10/31)

1. (9分) 填充題

   (a) (3分) $\int x^2 + \frac{1}{x^2}\, dx =$ ______________________.

   (b) (3分) $y = \sin x + \ln 7$, $dy =$ ______________________.

   (c) (3分) $dy = e^x\, dx$, 則 $y =$ ______________________.

   sol: (a)

   $$\int \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) dt = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C$$

   (b)

   $$y = \sin x + \ln 7 \Rightarrow dy = (\sin x + \ln 7)'\ dx = \cos x\, dx$$

   (c)

   $$dy = e^x\, dx \Rightarrow y = \int e^x\, dx = e^x + C$$

2. (5分) 用線性逼近，估計 $\tan^{-1} 0.996$.

   sol:

   $$\begin{aligned} f(x) = \tan^{-1} x \quad &\Rightarrow \quad f'(x) = \tfrac{1}{1+x^2} \\ \tan^{-1} 0.996 \quad &= \quad f(0.996) \\ &= \quad f(1 - 0.004) \\ &\approx \quad f(1) + f'(1)(-0.004) \\ &= \quad \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{1}{1+1^2}(-0.004) \\ &= \quad \tfrac{\pi}{4} - 0.002 \end{aligned}$$

3. (6分) 簡答題

   (a) (3分) $f(x) = \frac{1}{x}$，為什麼不能藉由平均值定理找到一個 $\xi \in (-1, 1)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}$.

   (b) (3分) 舉例: $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 且$A$ 中每一點a, $f'(a) = 0$，但 $f(x)$ 不是常數函數.

   sol: (a)

   因為$[-1, 1]$不在$f(x) = \frac{1}{x}$的定義域$\{x \mid x \neq 0\}$中，不能用平均值定理。

   (b)

   $$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$