1081微乙01-04班期中考解答和評分標準

1. (20%) 求以下的極限值。

(a) (5%) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x^2+3x-4}-x}{x-1}$. (b) (5%) $\lim\limits_{x\to 0^-} x\cdot\sqrt{1+\dfrac{9}{x^2}}$.

(c) (5%) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-1}{x^2}$. (d) (5%) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{e}{x}\right)^{2x}$. (提示: 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$.)

Solution:

(a)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x^2+3x-4}-x}{x-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{2x^2+3x-4}-x)(\sqrt{2x^2+3x-4}+x)}{(x-1)(\sqrt{2x^2+3x-4}+x)} \quad \text{(2 points)}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{(x-1)(\sqrt{2x^2+3x-4}+x)} \quad \text{(1 points)}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{(x+4)}{\sqrt{2x^2+3x-4}+x} \quad \text{(1 points)}\\
&= \frac{5}{2} \quad \text{(1 points).}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} x\cdot\sqrt{1+\frac{9}{x^2}} &= \lim_{x\to 0^-}(-\sqrt{x^2+9}) \quad \text{(3 points)}\\
&= -3 \quad \text{(2 points).}
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-1}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{(\cos 3x-1)(\cos 3x+1)}{x^2(\cos 3x+1)} \quad \text{(2 points)}\\
&= -\lim_{x\to\infty}\frac{\sin^2 3x}{x^2(\cos 3x+1)}\\
&= -\lim_{x\to 0} 9\cdot\frac{\sin^2 3x}{(3x)^2}\frac{1}{\cos 3x+1} \quad \text{(2 points)}\\
&= -\frac{9}{2} \quad \text{(1 points).}
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}(1+e/x)^{2x} &= \lim_{x\to\infty}(1+e/x)^{(x/e)\cdot(2e)} \quad \text{(3 points)}\\
&= e^{2e} \quad \text{(2 points).}
\end{aligned}$$

2. (15%) 求以下函數的導函數。

(a) (5%) $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{1-\cos 2x}$.

(b) (5%) $f(x) = \tan^{-1}\left(\sqrt{e^x - 1}\right)$.

(c) (5%) $f(x) = (\sec x)^x$, $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$.

Solution:

(a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2\cos 2x(1-\cos 2x) - \sin 2x \cdot (2\sin 2x)}{(1-\cos 2x)^2} \quad (4\%) \\ &= \frac{2\cos 2x - 2}{(1-\cos 2x)^2} \\ &= \frac{-2}{1-\cos 2x}. \quad (1\%) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+(\sqrt{e^x-1})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{e^x-1}} \cdot e^x \quad (2\%;\ 1\%;\ 1\%) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{e^x-1}}. \quad (1\%) \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\ln(\sec x)^x} = e^{x \ln \sec x}. \quad (1\%) \\ f'(x) &= e^{x \ln \sec x} \cdot (\ln \sec x + x \cdot \frac{\sec x \tan x}{\sec x}) \quad (3\%) \\ &= (\sec x)^x (\ln \sec x + x \tan x). \quad (1\%) \end{aligned}$$

3. (14%) $f(x) = x^5 + 2x - 3$.

(a) (4%) 說明 $f(x)$ 是 1 對 1 函數。

(b) (5%) 由(a)知 $f(x)$ 有反函數 $f^{-1}(x)$. 求 $f^{-1}(-3)$ 和 $(f^{-1})'(-3)$.

(c) (5%) 寫下 $f^{-1}(x)$ 在 $x = -3$ 的線性逼近。用線性逼近估計 $f^{-1}(-3.01)$.

Solution:

(a) $f'(x) = 5x^4 + 2$ (2 pts, 計算 $f'(x)$)

sol 1: $\because f'(x) \geq 2 > 0 \therefore f(x)$ is strictly increasing. Hence $f(x)$ is 1-1 (2 pts)

sol 2: By Rolle's Theorem, if $f(x_1) = f(x_2)$ for some $x_1 < x_2$, then there is some $c \in (x_1, x_2)$ such that $f'(c) = 0$. However, $f'(c) = 5c^4 + 2 \geq 2$. We obtain a contradiction. Thus $f(x)$ must be 1-1. (2 pts)

(b) (1 pt) $\because f(0) = -3 \therefore f^{-1}(-3) = 0$

(2 pts, 反函數的微分) $(f')^{-1}(-3) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(-3))}$

(2 pts, 帶值, 計算 $f'(0)$) $f'(f^{-1}(-3)) = f'(0) = 2$. Hence $(f^{-1})'(-3) = \dfrac{1}{2}$.

(c) (3 pts, 線性逼近的定義, 帶入 $f^{-1}(-3)$, $(f^{-1})'(-3)$.)
The linear approximation of $f^{-1}(x)$ at $x = -3$ is

$$L(x) = f^{-1}(-3) + (f^{-1})'(-3)(x - (-3)) = \frac{1}{2}(x + 3)$$

(2 pts) $f^{-1}(-3.01) \approx L(-3.01) = \dfrac{1}{2}(-3.01 + 3) = -0.005$

4. (9%) 求曲線 $\ln(x^2 - 3y) = x - y - 1$ 在點 $(2, 1)$ 的切線方程式。

Solution:

Differentiate both sides of the equation $\ln(x^2 - 3y) = x - y - 1$:

$$\frac{2x - 3\frac{dy}{dx}}{x^2 - 3y} = 1 - \frac{dy}{dx}. \quad (4\%)$$

This implies that

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - 3y - 2x}{x^2 - 3y - 3}.$$

So we have

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x,y)=(2,1)} = \frac{3}{2}. \quad (3\%)$$

So the equations of the tangent line to the curve at the point $(2, 1)$ is

$$y = \frac{3}{2}(x - 2) + 1. \quad (2\%)$$

5. (6%) 用平均值定理說明

$$\frac{a}{\sqrt{1-a^2}} < \sin^{-1}(2a) - \sin^{-1}(a) < \frac{a}{\sqrt{1-4a^2}},\ \text{其中 } 0 < a < \frac{1}{2}.$$

Solution:

Let $f(x) = \sin^{-1} x$, $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (2 pts, $\sin^{-1} x$ 的微分)

(2 pts, 正確使用 the MVT.)

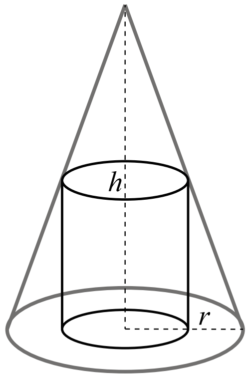
By the Mean Value Theorem, $\sin^{-1}(2a) - \sin^{-1}(a) = f(2a) - f(a) = f'(c)(2a-a) = \dfrac{1}{\sqrt{1-c^2}} \cdot a$ for some $c \in (a, 2a)$

(2 pts, 由 $c \in (a, 2a)$ 推得不等式)

$\because c \in (a, 2a) \therefore \dfrac{1}{\sqrt{1-a^2}} < \dfrac{1}{\sqrt{1-c^2}} < \dfrac{1}{\sqrt{1-4a^2}}$

Hence $\dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}} < \sin^{-1}(2a) - \sin^{-1}(a) = \dfrac{1}{\sqrt{1-c^2}} \cdot a < \dfrac{a}{\sqrt{1-4a^2}}$

6. (12%) 有一直圓錐, 底圓半徑為 r, 高為 h, $r, h > 0$, 找出最大體積之內接直圓柱體（如圖）.



Solution:

(a) 【至此2%】 令圓柱體底圓半徑為x, $0 < x < r$, 則其高y滿足 $\frac{x}{r} + \frac{y}{h} = 1$, 由此得 $y = h(1 - \frac{x}{r})$.

(b) 【至此5%】圓柱體體積為

$$V(x) = \pi x^2 y = x^2 \pi \cdot h(1 - \frac{x}{r}) = \frac{\pi h}{r} \cdot x^2 (r - x)$$

(c) 【至此8%】求候選點

$$V'(x) = \frac{\pi h}{r} \cdot (2rx - 3x^2) = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{2}{3}r, \;\; x = 0 \text{ (不合)}$$

(d) 【至此12%】最大值之說明

由於 $x = \frac{2}{3}r$ 為$0 < x < r$ 唯一極值, $V(\frac{2}{3}r) = \frac{4}{27}\pi r^2 h > 0$,且 $V(0) = V(r) = 0$, 故$V(\frac{2}{3}r)$必為最大值.

其他說明方式：$\lim_{x \to 0} V(x) = \lim_{x \to r} V(x) = 0$ 或用一階測試直接看出體積值在$x = \frac{2}{3}r$兩側皆比較小。

評分建議.

- (a) 部分的評分要看學生的做法，重點要得到(b)的結果。
- 只算出critical point（用一階導數）得8分；
- 算出critical point, 用二階測試得出局部極大，誤以為是最大者, 得10分.
- 有意識到必須處理「最」大值問題並有說明者, 才能得滿分.
- 是否要算出$V(\frac{2}{3}r)$ 要看學生如何論證。用一階測試可不用，但若用比較候選點與邊界點的想法，則必須算出（雖然很明顯）。
- 完全沒想到 $0 < x < r$者，照理會沒有最大值，可斟酌給分，最高8分（計算部分全算完）。

7. (24%) 依以下步驟畫出函數 $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{3x^3}$ 的圖形。

(a) (2%) 討論 $y = f(x)$ 的對稱性。

(b) (6%) 求 $f'(x)$。找出 $f(x)$ 的遞增遞減區間。

(c) (2%) 分類(局部)極值點。

(d) (6%) 求 $f''(x)$。討論 $y = f(x)$ 的凹性。

(e) (2%) 求出 $y = f(x)$ 的反曲點。

(f) (2%) 求 $y = f(x)$ 的漸近線。

(g) (4%) 畫出函數圖形。

Solution:

(a) 奇函數, 對原點對稱. (【兩者有一即可】)【2%】

(b) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^4} = \dfrac{1-x^2}{x^4}$【2%】;
遞增: $-1 < x < 0,\ 0 < x < 1$【2%】; 遞減: $x < -1,\ x > 1$【2%】.

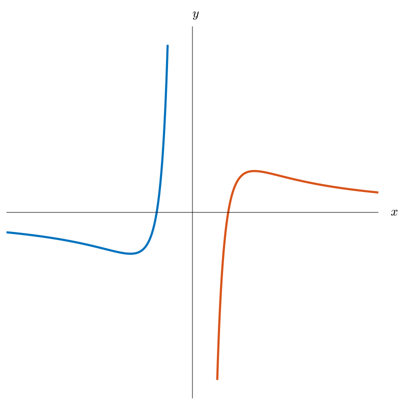
(c) 極大值: $f(1) = \dfrac{2}{3}$【1%】; 極小值: $f(-1) = -\dfrac{2}{3}$【1%】.

(d) $f''(x) = \dfrac{2}{x^3} - \dfrac{4}{x^5} = 2 \cdot \dfrac{x^2-2}{x^5}$【2%】;
凹向上: $-\sqrt{2} < x < 0,\ \sqrt{2} < x$【2%】; 凹向下: $x < -\sqrt{2},\ 0 < x < \sqrt{2}$;【2%】.

(e) 反曲點: $(-\sqrt{2}, -\dfrac{5}{12}\sqrt{2})$【1%】, $(\sqrt{2}, \dfrac{5}{12}\sqrt{2})$【1%】.

(f) 水平漸近線: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$,故為$y = 0$【1%】; 垂直漸近線: $x = 0$【1%】.

(g) 作圖:



評分建議.

- 由於學生不能使用計算機，只要圖的特徵全部正確（符合(a)-(f) 的分析），(g)即可滿分。
- 學生應依照(a)-(f) 的分析作圖。(a)-(f) 的分析若和(g)的圖不合，則(g)不給分。 反而，雖然(a)-(f) 算錯，但(a)-(f) 的分析若和(g)的圖一致，則(g)可給1或2分。
- 學生明顯手抖誤差可斟酌扣分，但不必認為是(a)-(f) 的分析和(g)的圖不合。
- 因為從(a)已知圖形對原點對稱，若(g)的對稱特徵畫得太離譜，圖應扣分。
- 有些學生會把重要資訊（如極值，反曲點）全部「只」標示在圖上，應算得分。