微乙小考四 (2019/5/16)

1. (8 %) 令某物體在 t 時間時溫度為 $T(t)$，在 $t = t_0$ 時溫度為 T_0，且室溫為 H。 已知牛頓冷卻定律為

$$T'(t) = -\alpha(T(t) - H),$$

其中 $\alpha > 0$ 為與該物體有關之常數。

(a) 求解 $T(t)$。

(b) 將魚從冰箱冷凍庫($-5°C$) 拿出來在室溫 $25°C$ 下解凍，過了一個鐘頭後， 其溫度約為 $10°C$。若希望在烹調時，魚溫度至少為 $15°C$，應在烹調的幾個鐘頭前拿出來解凍? (四捨五入到小數點下一位，已知 $\ln 2 = 0.69$，$\ln 3 = 1.09$)

sol: (a) 題求 $\begin{cases} T'(t) = -\alpha(T(t) - H) \\ T(t_0) = T_0 \end{cases}$ 的解

$$\begin{aligned}
T'(t) = -\alpha(T(t) - H) &\Rightarrow \frac{T'(t)}{T(t) - H} = -\alpha \\
&\Rightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{T'(s)}{T(s) - H}\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} -\alpha \mathrm{d}s \\
&\Rightarrow [\ln(T(s) - H)]_{s=t_0}^{s=t} = [-\alpha s]_{s=t_0}^{s=t} \\
&\Rightarrow \ln\left(\left|\frac{T(t) - H}{T(t_0) - H}\right|\right) = -\alpha(t - t_0) \\
&\Rightarrow \frac{T(t) - H}{T_0 - H} = e^{-\alpha(t - t_0)} \\
&\Rightarrow T(t) = H + (T_0 - H)e^{-\alpha(t - t_0)}
\end{aligned}$$

(b) 根據題意，$T(0) = -5$、$H = 25$，可以得到:

$$T(t) = 25 + (-5 - 25)e^{-\alpha(t-0)} = 25 - 30e^{-\alpha t}$$

再由$T(1) = 10$，可以得到$\alpha = \ln 2$，所以魚的溫度對時間的關係是:

$$T(t) = 25 - 30e^{-(\ln 2)t}$$

現求解方程:

$$15 = 25 - 30e^{-(\ln 2)t}$$

可以得到$t = \dfrac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1.6(\mathrm{hr})$

請翻到背面，繼續作答!!

2. (12 %) 求解下列微分方程。

(a) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2y}$， $y(0) = 1$。

(b) $\frac{dy}{dx} = 2 + \frac{2y}{x}$， $y(\frac{1}{4}) = 0$。

(c) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{e^{-xy}}{x}$， $y(1) = 0$， $x > 0$。(提示: 可假設 $u = xy$，並求出 u 滿足的微分方程式)

sol: (a) 整理方程即可得到:

$$
\begin{aligned}
y'(x) = \frac{x}{2y(x)} &\Rightarrow 2y(x)y'(x) = x \\
&\Rightarrow \int_0^x 2y(s)y'(s)\mathrm{d}s = \int_0^x s\mathrm{d}s \\
&\Rightarrow [y^2(s)]_{s=0}^{s=x} = \left[\frac{1}{2}s^2\right]_{s=0}^{s=x} \\
&\Rightarrow y^2(x) - y^2(0) = \frac{1}{2}x^2 \\
&\Rightarrow y^2(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1
\end{aligned}
$$

(b) 這是線性的一階常微分方程，整理方程可以得到:

$$
y'(x) - \frac{2}{x}y(x) = 2
$$

其中積分因子為$u(x) = e^{\int -\frac{2}{x}\mathrm{d}x} = \frac{1}{x^2}$，因此有:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{x^2}\cdot y(x)\right] = \frac{1}{x^2}\cdot 2 &\Rightarrow \int_{\frac{1}{4}}^x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{1}{s^2}\cdot y(s)\right]\mathrm{d}s = \int_{\frac{1}{4}}^x \frac{2}{s^2}\mathrm{d}s \\
&\Rightarrow \frac{1}{x^2}y(x) - 16\cdot 0 = \left[\frac{-2}{s}\right]_{s=\frac{1}{4}}^{s=x} \\
&\Rightarrow y(x) = x^2\left(\frac{-2}{x} + 8\right) = -2x + 8x^2
\end{aligned}
$$

(c) 令$u(x) = xy(x)$，注意到$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u(x) = y(x) + xy'(x)$，所以$y'(x) = \frac{u'(x) - y(x)}{x}$，

$$
\begin{aligned}
y'(x) + \frac{y(x)}{x} = \frac{e^{-xy(x)}}{x} &\Rightarrow \frac{u'(x) - y(x)}{x} + \frac{y(x)}{x} = \frac{e^{-u(x)}}{x} \\
&\Rightarrow u'(x) = e^{-u(x)} \\
&\Rightarrow e^{u(x)}u'(x) = 1 \\
&\Rightarrow \int_1^x e^{u(s)}u'(s)\mathrm{d}s = \int_1^x 1\mathrm{d}s \\
&\Rightarrow e^{u(x)} - e^{u(1)} = x - 1 \\
&\Rightarrow u(x) = \ln\left(\left|x - 1 + e^{u(1)}\right|\right) = \ln(|x|)
\end{aligned}
$$

所以$y(x) = \frac{u(x)}{x} = \frac{\ln(|x|)}{x}$