1072微乙01-05班期中考解答和評分標準

1. (12%) 若 $g(t)=f(x(t),y(t))$，且 $\begin{cases} x(t)=a+th \\ y(t)=b+tk \end{cases}$，其中 $a,b,h,k\in\mathbb{R}$ 是常數， 求 $g''(0)$。

Solution:

(3pts) 找到g'(x)

$$g'(x)=f_x(x(t),y(t))\frac{dx}{dt}+f_y(x(t),y(t))\frac{dy}{dt}$$

(1pts) 找到x'(t), y'(t)

$$g'(x)=f_x(x(t),y(t))\ \mathbf{h}+f_y(x(t),y(t))\ \mathbf{k}$$

(6pts) g"(x)

$$\begin{aligned} g''(x) &= [\quad f_{xx}(x(t),y(t))\frac{dx}{dt}+f_{xy}(x(t),y(t))\frac{dy}{dt}\quad]\ \mathbf{h}\ + \\ &\quad [\quad f_{yx}(x(t),y(t))\frac{dx}{dt}+f_{yy}(x(t),y(t))\frac{dy}{dt}\quad]\ \mathbf{k} \\ &= f_{xx}(x(t),y(t))h^2+f_{xy}(x(t),y(t))hk+f_{yx}(x(t),y(t))hk+f_{yy}(x(t),y(t))k^2 \end{aligned}$$

(2pts) g"(0)

$$g''(0)=f_{xx}(a,b)h^2+2f_{xy}(a,b)hk+f_{yy}(a,b)k^2 \qquad \text{or}$$

$$g''(0)=f_{xx}(x(t),y(t))h^2+2f_{xy}(x(t),y(t))hk+f_{yy}(x(t),y(t))k^2|_{(a,b)}$$

2. (14%) 令函數 $f(x,y,z) = z\tan^{-1}(xy)$.

(a) (6%) 求梯度 $\nabla f(2,\frac{1}{2},4)$.

(b) (4%) f 在點 $(2,\frac{1}{2},4)$ 沿向量 $(a,1,0)$ 的方向導數是 0，求 a 值。

(c) (4%) 求曲面 $f(x,y,z) = \pi$ 在 $(2,\frac{1}{2},4)$ 的切面方程式。

Solution:

(a) $\nabla f = \left(\frac{zy}{1+x^2y^2}, \frac{zx}{1+x^2y^2}, \tan^{-1}(xy)\right)$ (4%)

$\nabla f(2,\frac{1}{2},4) = \left(\frac{2}{2}, \frac{8}{2}, \tan^{-1}(1)\right) = (1,4,\frac{\pi}{4})$ (2%)

(b) $\nabla f(2,\frac{1}{2},4)\cdot(a,1,0) = 0 \Rightarrow (1,4,\frac{\pi}{4})\cdot(a,1,0) = 0$ (3%)

$\Rightarrow a = -4$ (1%)

(c) Since $f(2,\frac{1}{2},4) = 4\tan^{-1}(1) = \pi$, we know $(2,\frac{1}{2},4)$ is located on the surface $f(x,y,z) = \pi$. Hence the tangent plane we want is $f_x(2,\frac{1}{2},4)(x-2)+f_y(2,\frac{1}{2},4)(y-\frac{1}{2})+f_z(2,\frac{1}{2},4)(z-4) = 0$. (2%)

$\Rightarrow 1\cdot(x-2)+4\cdot(y-\frac{1}{2})+\frac{\pi}{4}\cdot(z-4) = 0$ (2%)

3. (18%) 已知 $(-2,1)$ 是 $f(x,y)=x^2+4x+y^3-3ay$ 的極值候選點。

(a) (2%) 求 a 值。

(b) (6%) 求出 $f(x,y)$ 的所有極值候選點，並討論其極值性質。

(c) (10%) 求 $f(x,y)$ 在長方形 $R=\{(x,y)|-3\le x\le 0,-2\le y\le 2\}$ 的最大值和最小值。

Solution:

(a) f在$(-2,1)$的梯度為零, $\nabla f(x,y)=(2x+4,3y^2-3a)$, 所以$\nabla f(-2,1)=(0,3-3a)=(0,0)$, 因此$a=1$.

(b) $\nabla f(x,y)=(2x+4,3y^2-3)=(0,0)$, 所以極值候選點為$(-2,1),(-2,-1)$ (各一分).利用二階測試考慮 $D(x,y)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=2\cdot 6y-0\cdot 0=12y$

$D(-2,1)=12>0,\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2>0$,所以$(-2,1)$是局部極小值.

(兩分,沒有檢查f_{xx}大於零不給分)

$D(-2,-1)=-12<0$, 所以$(-2,-1)$是鞍點.(兩分)

(c) Sol 1. 考慮內部極值候選點$(-2,1),(-2,-1)$和所有邊界值(**邊界只檢查四個角落不給分!!!!!**).

(x=0): 我們要算$g(y)=f(0,y)=y^3-3y$在$-2\le y\le 2$的極值候選點.
$\dfrac{\partial g(y)}{\partial y}=\dfrac{\partial(y^3-3y)}{\partial y}=3y^2-3$, 所以$y=1,-1$為$g(y)$的極值候選點,而邊界上的$y=2,-2$也為候選點, 所以我們需要考慮四個候選點$(0,1),(0,-1),(0,2),(0,-2)$, 他們的函數值分別是$-2,2,2,-2$.

(x=-3): 我們要算$g(y)=f(-3,y)=y^3-3y-3$在$-2\le y\le 2$的極值候選點.
$\dfrac{\partial g(y)}{\partial y}=\dfrac{\partial(y^3-3y-3)}{\partial y}=3y^2-3$, 所以$y=1,-1$為$g(y)$的極值候選點,而邊界上的$y=2,-2$也為候選點, 所以我們需要考慮四個候選點$(-3,1),(-3,-1),(-3,2),(-3,-2)$, 他們的函數值分別是$-5,-1,-1,-5$.

(y=2): 我們要算$h(x)=f(x,2)=x^2+4x+2$在$-3\le x\le 0$的極值候選點.
$\dfrac{\partial h(x)}{\partial x}=\dfrac{\partial(x^2+4x+2)}{\partial x}=2x+4$, 所以$x=-2$為$h(x)$的極值候選點,而邊界上的$x=-3,0$也為候選點, 所以我們需要考慮三個候選點$(-2,2),(-3,2),(0,2)$, 他們的函數值分別是$-2,-1,2$.

(y=-2): 我們要算$h(x)=f(x,-2)=x^2+4x-2$在$-3\le x\le 0$的極值候選點.
$\dfrac{\partial h(x)}{\partial x}=\dfrac{\partial(x^2+4x-2)}{\partial x}=2x+4$, 所以$x=-2$為$h(x)$的極值候選點,而邊界上的$x=-3,0$也為候選點, 所以我們需要考慮三個候選點$(-2,-2),(-3,-2),(0,-2)$, 他們的函數值分別是$-6,-5,-2$.

上面的所有值加上$f(-2,1)=-6,f(-2,-1)=-2$兩點可以得知最小值為-6, 發生在$(-2,-2)$ 及 $(-2,1)$, 最大值為2,發生在$(0,-1)$及$(0,2)$.(四條邊各**2**分**,**內部**2**分)

注意**:**

- 「因為$(-2,1)$是局部極小值所以最小值是$f(-2,1)=-6$」這個論述是錯的不給分.
- $y=2$和$y=-2$的狀況因為要考慮的函數是二次函數,因此可以不用使用微分的論證說明極小值在$x=-2$,極大值在$x=0$,但是$x=-3$和$x=0$的狀況要考慮一個三次函數在閉區間上的極值,因此沒有過程直接說哪些點是極值點不給分**,**沒有考慮到邊界$y=2,-2$也不給分**.**

Sol 2. 考慮內部極值候選點$(-2,1),(-2,-1)$和所有邊界值.利用Lagrange乘子法尋找邊界的極值候選點.

(x=0): $(2x+4,3y^2-3)=\lambda\cdot(1,0)$, 所以可行解為$(0,1),(0,-1)$, 對應到的$\lambda$皆為4.
但是Lagrange求的是整條$x=0$上的極值候選點, 今天y的範圍有被限制住, 因此邊界$(0,2),(0,-2)$也要考慮.(未考慮邊界酌扣分)

(x=-3): $(2x+4,3y^2-3)=\lambda\cdot(1,0)$, 所以可行解為$(-3,1),(-3,-1)$, 對應到的$\lambda$皆為$-2$. 同理, 邊界上的$(-3,2),(-3,-2)$也要考慮.

(y=2): $(2x+4,3y^2-3)=\lambda\cdot(0,1)$, 所以可行解為$(-2,2)$, 對應到的$\lambda$為9. 同理, 邊界上的$(-3,2),(0,2)$也要考慮.

(y=-2): $(2x+4,3y^2-3)=\lambda\cdot(0,1)$, 所以可行解為$(-2,-2)$, 對應到的$\lambda$為9.同理, 邊界上的$(-3,-2)$, $(0,-2)$ 也要考慮.

上面所有候選點加上$(-2,-1),(-2,1)$兩點一起比較, 得最小值-6,最大值2. (四條邊各**2**分**,**內部**2**分)

Sol 3. 注意到$f(x,y)=(x^2+4x)+(y^3-3y)$可以分別看作是x和y的函數,而且限制區域是一個長方形,兩個變數x,y彼此不影響範圍,所以可以分別求$h(x)=x^2+4x$在$-3\le x\le 0$, 和$g(y)=y^3-3y$在$-2\le y\le 2$ 的最大最小值.

$h(x)=(x+2)^2-4$是一個二次函數,所以最小值發生在$x=-2$, 最大值發生在$x=0$,函數值分別是-4和0.(五分)

$g(y)$的部分考慮$\dfrac{\partial g(y)}{\partial y}=\dfrac{\partial(y^3-3y)}{\partial y}=3y^2-3$, 所以$y=1,-1$為$g(y)$的極值候選點,而邊界上的$y=2,-2$也為候選點.經過計算$g(y)$的最大值發生在$2,-1$, 最小值發生在$-2,1$, 函數值分別是2和$-2$.(五分**,**沒有說明為何$g(y)$的最大最小值是2和$-2$一樣不給分)

注意**:**

- 如果你寫「因為$(-2,1)$是局部極小值所以最小值是$f(-2,1)=-6$」因此後面只算最大值,那基本上就先扣五分了.

4. (16%) 求在橢圓 $x^2+4y^2=1$ 上，$-x^2+4xy+2y^2$ 的最大值和最小值。

Solution:

Let $f(x,y)=-x^2+4xy+2y^2$ and $g(x,y)=x^2+4y^2-1$

By the method of Lagrange multipliers

$$\begin{cases} \nabla f=\lambda\nabla g \\ g(x,y)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x+4y=2\lambda x \\ 4x+4y=8\lambda y \\ x^2+4y^2=1 \end{cases} \qquad \text{(4 points)}$$

$$\Rightarrow \frac{-2-2\lambda}{4}=\frac{4}{4-8\lambda} \Rightarrow \lambda=1 \text{ or } -\frac{3}{2}$$

For $\lambda=1 \Rightarrow x=y \Rightarrow (x,y)=(\pm\frac{1}{\sqrt{5}},\pm\frac{1}{\sqrt{5}})$ (4 points)

For $\lambda=-\frac{3}{2} \Rightarrow x=-4y \Rightarrow (x,y)=(\pm\frac{4}{\sqrt{20}},\mp\frac{1}{\sqrt{20}})$ (4 points)

$f(\pm\frac{1}{\sqrt{5}},\pm\frac{1}{\sqrt{5}})=1$

$f(\pm\frac{4}{\sqrt{20}},\mp\frac{1}{\sqrt{20}})=-\frac{3}{2}$

Hence, maximum $=1$ and minimum $=-\frac{3}{2}$ (4 points)

5. (14%) 計算二重積分

(a) (6%) $\int_0^1 \int_{\sqrt[3]{y}}^1 \frac{1}{x(1+x^3)} dxdy.$

(b) (8%) $\iint_\Omega y^2 e^{xy^2+x} dA$, Ω 是 $x=0$, $y=0$, $y=\sqrt{3}$ 和 $x=\frac{1}{1+y^2}$ 圍成的區域。

Solution:

(a) $\sqrt[3]{y} \le x \le 1 \Rightarrow y \le x^3 \le 1 \Rightarrow 0 \le y \le x^3$

and $0 \le \sqrt[3]{y} \le x \le 1 \Rightarrow 0 \le x \le 1$

hence by Fubini Thm, $\int_0^1 \int_{\sqrt[3]{y}}^1 \frac{1}{x(1+x^3)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{x^3} \frac{1}{x(1+x^3)} \mathrm{d}y\mathrm{d}x$

$\int_0^1 \int_0^{x^3} \frac{1}{x(1+x^3)} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{y}{x(1+x^3)}\Big|_0^{x^3} \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^3}{x(1+x^3)} \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3} \mathrm{d}x$

$= \frac{1}{3} ln(1+x^3)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(ln2 - ln1) = \frac{1}{3} ln2$

配分:

(1)有正確地使用Fubini把範圍交換得3分

(2)有正確地把$\frac{x^2}{1+x^3}$積分出來且最後答案正確得3分

(b) $\iint_\Omega y^2 e^{(xy^2+x)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{1}{1+y^2}} y^2 e^{(xy^2+x)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$= \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{1}{1+y^2}} y^2 e^{(x(1+y^2))} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{y^2}{1+y^2} e^{(x(1+y^2))}\Big|_0^{\frac{1}{1+y^2}} \mathrm{d}y$

$= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{y^2}{1+y^2}(e^{(1+y^2)\frac{1}{1+y^2}} - e^0)\mathrm{d}y = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{y^2}{1+y^2}(e-1)\mathrm{d}y = (e-1)\int_0^{\sqrt{3}} (1 - \frac{1}{1+y^2})\mathrm{d}y$

$= (e-1)(y - \tan^{-1} y\Big|_0^{\sqrt{3}}) = (e-1)[(\sqrt{3} - \tan^{-1}\sqrt{3}) - (0 - \tan^{-1} 0)]$

$= (e-1)(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3})$

配分:

(1)將原式寫至$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{y^2}{1+y^2}(e-1)\mathrm{d}y$得6分

(2)正確積分$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{y^2}{1+y^2}(e-1)\mathrm{d}y$且寫出正確答案得2分

註:有將近三分之二的人都用變數變換，雖然也是可以，但是變數變換是在原本的積分積不出來或是積分範圍很奇怪的情況下才會使用。所以用變數變換的人只要有寫出正確的變換過去的積分式子得2分，然後成功把裡層的積分積出的得4分，剩下的部分到答案值2分。

然後這次的批改方式是只要裡層積分積出來跟(1)的不一樣，還有使用變數變換後式子不正確的我就會全扣，因為我認為這只是基本的exponential的積分，是很基礎的東西，還有變數變換是這次考試的重點，所以我改得比較嚴格一點。

6. (14%) 計算二重積分 $\iint_\Omega x dA$，其中區域 Ω 以極座標表示為 $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$, $0 \le r \le \sin 2\theta$.

Solution:

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sin 2\theta} r^2 \cos\theta \; dr d\theta$ (6 points)

$\displaystyle= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} \cos\theta \sin^3 2\theta \; d\theta$ (1 points)

$\displaystyle= \frac{2^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta \sin^3\theta \; d\theta$ (1 points)

$\displaystyle= -\frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta (1 - \cos^2\theta) \; d\cos\theta$ (2 points)

$\displaystyle= -\frac{8}{3} (\frac{1}{5}\cos^5\theta - \frac{1}{7}\cos^7\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16}{105}$ (4 points)

⊙ If you didn't multiply Jacobian , deduct 6 points.

7. (12%) 計算二重積分 $\iint_\Omega e^{xy} dA$，其中 Ω 是由 $y=1$, $y=3$, $xy=1$ 和 $xy=4$ 圍成之區域。

Solution:

解一：令 $u=xy, v=y \Rightarrow x=\dfrac{u}{v}, y=v$ 。

$\Omega=\{(x,y):1\le y\le 3, 1\le xy\le 4\}=\left\{\left(\dfrac{u}{v},v\right):1\le u\le 4, 1\le v\le 3\right\}$，

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{v} & -\dfrac{u}{v^2}\\ 0 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{v} \text{ 。}$$

由變數變換公式有

$$\begin{aligned}\iint_\Omega e^{xy}\ \mathrm{d}A &= \iint_{[1,4]\times[1,3]} e^u\cdot|J(u,v)|\ \mathrm{d}u\mathrm{d}v\\ &= \int_1^4\int_1^3 \frac{e^u}{v}\ \mathrm{d}v\mathrm{d}u\\ &= \int_1^4 \left(e^u\ln|v|\right)\Big|_1^3\ \mathrm{d}u\\ &= \int_1^4 e^u\ln 3\ \mathrm{d}u\\ &= e^u\cdot\ln 3\Big|_1^4=(e^4-e)\ln 3\end{aligned}$$

解二：觀察到 $\Omega=\left\{(x,y):1\le y\le 3,\ \dfrac{1}{y}\le x\le\dfrac{4}{y}\right\}$，因此有

$$\begin{aligned}\iint_\Omega e^{xy}\ \mathrm{d}A &= \int_1^3\int_{\frac{1}{y}}^{\frac{4}{y}} e^{xy}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \int_1^3 \left(\frac{e^{xy}}{y}\right)\Bigg|_{\frac{1}{y}}^{\frac{4}{y}}\ \mathrm{d}y\\ &= \int_1^3 \frac{1}{y}\cdot(e^4-e)\ \mathrm{d}y\\ &= \big(\ln|y|\cdot(e^4-e)\big)\Big|_1^3=\ln 3\cdot(e^4-e)\end{aligned}$$

評分標準：

- 畫出積分範圍至少會得到3分，寫出正確的積分範圍至少會得到6分。
- 採用解一並且Jacobian ($J(u,v)$)算錯，或者積分中忘記代入Jacobian者扣6分；積分中代成Jacobian的倒數則扣3分。
- 積分過程有計算錯誤或未完全化簡(包括寫出多餘的 $\ln 1$)，酌扣1至3分。
- 其他錯誤視情況扣分。
- 小細節： $J(u,v)$ 是 $\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$ (可能是 $\pm\dfrac{1}{u}$ 或 $\pm\dfrac{1}{v}$)， $|J(u,v)|$ 才是 $\left|\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\right|$ ($\dfrac{1}{u}$ 或 $\dfrac{1}{v}$)，很多人在列式的時候混淆了。(不扣分)