

微乙小考六 (2018/12/27)

1. (5分) 假設 $p > 0$ 。討論瑕積分 $\int_{0+}^1 \frac{1}{x^p} dx$ 是否存在並決定其值。

Proof.:

$$\begin{aligned} \text{若 } p = 1, \text{ 則 } \int_{0+}^1 \frac{1}{x^p} dx &= \lim_{a \rightarrow 0+} \int_a^1 \frac{1}{x} dx \\ &= \lim_{a \rightarrow 0+} (\ln x) \Big|_a^1 \\ &= \lim_{a \rightarrow 0+} \ln 1 - \ln a \\ &= \lim_{a \rightarrow 0+} -\ln a = \infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{若 } p \neq 1, \text{ 則 } \int_{0+}^1 \frac{1}{x^p} dx &= \lim_{a \rightarrow 0+} \int_a^1 x^{-p} dx \\ &= \lim_{a \rightarrow 0+} \left(\frac{x^{1-p}}{1-p} \right) \Big|_a^1 \\ &= \lim_{a \rightarrow 0+} \frac{1 - a^{1-p}}{1-p} = \begin{cases} \frac{1}{1-p} & \text{if } 0 < p < 1 \\ \infty & \text{if } p > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

所以 $0 < p < 1$ 時瑕積分收斂到 $\frac{1}{1-p}$, $p \geq 1$ 時發散。

2. (6分) 把函數 $f(x)$ 表示為形式 $\sum_{k=0}^n b_k(x+1)^k$.

(a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 10x + 5$.

(b) $f(x) = (x^2 + 2x + 2)^3$.

sol:

方法一:

(a) 令 $y = x + 1$, $x = y - 1$,

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 2x^2 + 10x + 5 = (y-1)^3 - 2(y-1)^2 + 10(y-1) + 5 \\ &= y^3 - 3y^2 + 3y - 1 - 2y^2 + 4y - 2 + 10y - 10 + 5 \\ &= y^3 - 5y^2 + 17y - 8 \\ &= (x+1)^3 - 5(x+1)^2 + 17(x+1) - 8 \end{aligned}$$

(b) 令 $y = x + 1$, $x = y - 1$,

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 + 2x + 2)^3 \\ &= ((y-1)^2 + 2(y-1) + 2)^3 \\ &= (y^2 + 1)^3 \\ &= y^6 + 3y^4 + 3y^2 + 1 = (x+1)^6 + 3(x+1)^4 + 3(x+1)^2 + 1 \end{aligned}$$

方法二:

令 $f(x) = \sum_{k=0}^n b_k(x+1)^k$ 為 $f(x)$ 在 $x = -1$ 處的泰勒展開式，那麼 $b_k = \frac{f^{(k)}(-1)}{k!}$ 。

(a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 10x + 5$, $f(-1) = -8$, $b_0 = -8$

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 10$, $f'(-1) = 17$, $b_1 = 17$

$f''(x) = 6x - 4$, $f''(-1) = -10$, $b_2 = -5$

$f'''(x) = 6$, $f'''(-1) = 6$, $b_3 = 1$

故 $f(x) = (x+1)^3 - 5(x+1)^2 + 17(x+1) - 8$

(b) 小題也可以用類似的方法，但是會比方法一慢許多。

3. (3分) 已知對任意一點 $x \in (-1, 1)$ 我們有 $\frac{1}{(1-x)^2} = (1+2x+3x^2+\cdots+10x^9) + \frac{\alpha(x)}{1-x} + \frac{x^{11}}{(1-x)^2}$ 。
請寫出 $\alpha(x)$ 。

sol:

方法一：

$$\frac{1}{(1-x)^2} = (1+2x+\cdots+10x^9) + \frac{\alpha(x)}{1-x} + \frac{x^{11}}{(1-x)^2}$$

$$\frac{1-x^{11}}{(1-x)^2} = (1+2x+\cdots+10x^9) + \frac{\alpha(x)}{1-x}$$

$$\frac{1+x+\cdots+x^{10}}{1-x} = (1+2x+\cdots+10x^9) + \frac{\alpha(x)}{1-x}$$

所以 $\alpha(x) = (1+x+\cdots+x^{10}) - (1-x)(1+2x+\cdots+10x^9)$

$$= (1+x+\cdots+x^{10}) - (1-x)[(1+\cdots+x^9) + (x+\cdots+x^9) + \cdots + (x^8+\cdots+x^9) + x^9]$$

$$= (1+x+\cdots+x^{10}) - [(1-x^{10}) + (x-x^{10}) + \cdots + (x^8-x^{10}) + (x^9-x^{10})]$$

$$= (1+x+\cdots+x^{10}) - (1+x+\cdots+x^9 - 10x^{10}) = 11x^{10}$$

方法二：

$$\frac{1-x^{11}}{1-x} = 1+x+\cdots+x^{10}, \text{ 對等號兩邊微分得到}$$

$$\frac{(-11x^{10})(1-x) - (-1)(1-x^{11})}{(1-x)^2} = 1+2x+\cdots+10x^9$$

整理得 $\frac{1-x^{11}}{(1-x)^2} = (1+2x+\cdots+10x^9) + \frac{11x^{10}}{1-x}$ 。

4. (6分)

(a) 求出由 $y = 2\sin x$, $y = \sin 2x$, $0 \leq x \leq \pi$, 所圍區域的面積。

(b) 求出半徑為 2 的球之體積。

sol: (a) $\sin 2x = 2\sin x \cos x \leq 2\sin x$ ，所以所求面積即為

$$\int_0^\pi (2\sin x - \sin 2x) dx = \left(-2\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x\right)\Bigg|_0^\pi = \left(2 + \frac{1}{2}\right) - \left(-2 + \frac{1}{2}\right) = 4。$$

(b) 考慮空間座標中 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 的內部，亦即一半徑為 2 的球。

對 $-2 \leq t \leq 2$ ，在 $x = t$ 處的截面為半徑 $\sqrt{4 - t^2}$ 的圓。

因此體積為 $\int_{-2}^2 (\sqrt{4 - t^2})^2 \pi \, dt = \pi \int_{-2}^2 4 - t^2 \, dt = \pi \left(4t - \frac{1}{3}t^3 \right) \Big|_{-2}^2 = \frac{32}{3} \pi$ 。