微乙小考二 (2018/10/11)

1. (5 %) 求出曲線 $(\cos t, \sin t)$ 在點 $t=0$ 和 $t=\frac{2\pi}{3}$ 的切線方程式。

sol: 對參數式$(x(t), y(t))$，切線會和向量$(x'(t), y'(t))$平行。

此題中，$(x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)$，切線平行向量$(-\sin t, \cos t)$。

$t=0$時，切線方向為$(-\sin 0, \cos 0) = (0,1)$，故知切線平行$y$軸；

又切線通過$(\cos 0, \sin 0) = (1,0)$，得切線方程式為$x=1$。

$t=\frac{2\pi}{3}$時，切線方向為$(-\sin\frac{2\pi}{3}, \cos\frac{2\pi}{3}) = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$，故切線斜率為$\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$；

又切線通過$(\cos\frac{2\pi}{3}, \sin\frac{2\pi}{3}) = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$，

得切線方程式為$(y-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{1}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})$，化簡得$y=\frac{x+2}{\sqrt{3}}$。

2. (9 %) 求出下列函數的導函數。

(a) $\tan(x^2) + (\tan x)^2$ (b) $\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ (c) $e^{\sin^{-1} x}$

sol: (a)

$$\begin{aligned}
&(\tan(x^2) + (\tan x)^2)' \\
=&(\tan(x^2))' + (\tan^2 x)' \\
=&\tan'(x^2)\cdot(x^2)' + 2\tan x\cdot(\tan x)' \\
=&\sec^2(x^2)\cdot(2x) + 2\tan x\cdot(\sec^2 x) \\
=&2x\sec^2(x^2) + 2\tan x\sec^2 x.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\right)' \\
=&\frac{(e^x + e^{-x})'(e^x - e^{-x}) - (e^x - e^{-x})'(e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2} \\
=&\frac{((e^x)' + (e^{-x})')(e^x - e^{-x}) - ((e^x)' - (e^{-x})')(e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2} \\
=&\frac{(e^x + (-e^{-x}))(e^x - e^{-x}) - (e^x - (-e^{-x}))(e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2} \\
=&\frac{(e^x - e^{-x})^2 - (e^x + e^{-x})^2}{(e^x - e^{-x})^2} \\
=&\frac{(e^x - e^{-x} + e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x} - e^x - e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2} \\
=&\frac{(2\cdot e^x)(-2\cdot e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2} \\
=&\frac{-4e^0}{(e^x - e^{-x})^2} = \frac{-4}{(e^x - e^{-x})^2}.
\end{aligned}$$

(c) $(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sin'(\sin^{-1} x)} = \frac{1}{\cos(\sin^{-1} x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，

因此$\left(e^{\sin^{-1} x}\right)' = e^{\sin^{-1} x}\cdot(\sin^{-1} x)' = \frac{e^{\sin^{-1} x}}{\sqrt{1-x^2}}$。

3. (6 %)

(a) 利用此已知結果 $\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$ 說明下列極限值

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1.$$

(b) 令 $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)$。求出 $f'(6)$。

sol: (a) 令$h=x-1$，那麼$x\to 1$時$h\to 0$，因此

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}\\ =&\lim_{h\to 0}\frac{\ln(h+1)}{h}\\ =&\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln(h+1)\\ =&\lim_{h\to 0}\ln\left[(h+1)^{\frac{1}{h}}\right]\\ =&\ln\left[\lim_{h\to 0}(h+1)^{\frac{1}{h}}\right]\end{aligned}$$

(補充說明：$\ln(x)$是連續函數，因此可以和$\lim$交換)

$=\ln e=1.$

(b) 對$f(x)$取$\ln$得$\ln f(x)=\ln x+\ln(x-1)+\cdots+\ln(x-6)$，

對x微分得$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}+\cdots+\dfrac{1}{x-6}$，

故$f'(x)=f(x)\left(\dfrac{1}{x}+\cdots+\dfrac{1}{x-6}\right)=f(x)\left(\dfrac{1}{x}+\cdots+\dfrac{1}{x-5}\right)+x(x-1)\cdots(x-5)$。

(利用積法則直接微分也會獲得一樣的式子)

因此$f'(6)=f(6)\times(\cdots)+6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=0\times(\cdots)+720=720$。

另解:

$f(6)=0$，因此

$f'(6)=\lim_{x\to 6}\dfrac{f(x)-f(6)}{x-6}=\lim_{x\to 6}\dfrac{f(x)}{x-6}=\lim_{x\to 6}x(x-1)\cdots(x-5)=6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=720$。