微乙小考五 (2018/6/14)

1. (7分) 假設 X 和 Y 兩個隨機變數且其值域為 $I_X = I_Y = \{1, 2\}$. 若是 X 和 Y 的聯合機率函數滿足 $P(X = 1, Y = 1) = P(X = 2, Y = 1) = P(X = 1, Y = 2) = \frac{1}{5}$.

   (a) (2分) $P(X = 2, Y = 2) =?$

   (b) (2分) 試求 X 的機率函數.

   (c) (3分) 試問 X 和 Y 是否獨立? 為什麼?

sol: (a) 因為機率總合為 1，我們會有

$$P(X = 1, Y = 1) + P(X = 1, Y = 2) + P(X = 2, Y = 1) + P(X = 2, Y = 2) = 1$$

得

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + P(X = 2, Y = 2) = 1 \Rightarrow \ P(X = 2, Y = 2) = \frac{2}{5}$$

(b) X 取值共有 $X = 1,\ X = 2$，且

$$P(X = 1) = P(X = 1, Y = 1) + P(X = 1, Y = 2) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

$$P(X = 2) = P(X = 2, Y = 1) + P(X = 2, Y = 2) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

機率函數為:

$$P_X(t) = \begin{cases} \frac{2}{5} & \text{if } t = 1 \\ \frac{3}{5} & \text{if } t = 2 \end{cases}$$

(c) 仿造 (b) 的計算我們會有

$$P_Y(t) = \begin{cases} \frac{2}{5} & \text{if } t = 1 \\ \frac{3}{5} & \text{if } t = 2 \end{cases}$$

但是

$$P(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{5} \neq P(X = 1) \cdot P(Y = 1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$$

故， X,Y 並非獨立。

2. (7分) 設 X 是一個隨機變數且滿足 $P_X(-1) = \frac{4}{9}, P_X(0) = \frac{1}{3}$ 和 $P_X(1) = \frac{2}{9}$.

   (a) (3分) 試求 $E(X^3 + 3)$.

   (b) (4分) 設 $Y \sim B(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. 若 X 和 Y 獨立,則 $\mathrm{Var}(3X + 2Y) =?$

sol: (a) 由題目 $P_X(-1)=\frac{4}{9},\ P_X(0)=\frac{1}{3},\ P_X(1)=\frac{2}{9}$ 可知道 X 取值只在 $X=-1,\ 0,\ 1$

且依照期望值公式，我們有 $E(X^3+3)=E(X^3)+E(3)$，其中

$$E(X^3)=(-1)^3P(X=-1)+(0)^3P(X=0)+(1)^3P(X=1)=\frac{-4}{9}+0+\frac{2}{9}=\frac{-2}{9}$$

$$E(3)=3$$

所以我們會有

$$E(X^3+3)=E(X^3)+E(3)=\frac{-2}{9}+3=\frac{25}{9}$$

(b)

1°

$$E(X)=(-1)\cdot\frac{4}{9}+(0)\cdot\frac{1}{3}+(1)\cdot\frac{2}{9}=\frac{-2}{9}$$

$$E(X^2)=(-1)^2\cdot\frac{4}{9}+(0)^2\cdot\frac{1}{3}+(1)^2\cdot\frac{2}{9}=\frac{2}{3}$$

故

$$Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{2}{3}-(\frac{-2}{9})^2=\frac{50}{81}$$

2° 因為 $Y\sim B(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

$$E(Y)=0\cdot P(Y=0)+1\cdot P(Y=1)=\frac{1}{2}$$

$$E(Y^2)=0^2\cdot P(Y=0)+1^2\cdot P(Y=1)=\frac{1}{2}$$

故

$$Var(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2=\frac{1}{2}-(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$$

所以由 $1^\circ,\ 2^\circ$

$$Var(3X+2Y)=(3)^2Var(X)+(2)^2Var(Y)=\frac{59}{9}$$

3. (6分) 試求 $\int_{-\infty}^{\infty}(x^2+x+1)e^{-x^2}dx.$

sol: 積分可以拆成:

$$\int_{-\infty}^{\infty}(x^2+x+1)e^{-x^2}dx=\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-x^2}dx+\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-x^2}dx+\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx$$

0° 其中 xe^{-x^2} 為奇函數，故

$$\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-x^2}dx=0$$

1° (由課本例題可知 $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$)

2° (計算 $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx$)

由分布積分，我們會有

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} x(xe^{-x^2}) dx = \int_{-\infty}^{\infty} xd\frac{-e^{-x^2}}{2} = (\frac{-xe^{-x^2}}{2})_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{2} dx$$
$$= 0 + \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

由 $0^\circ,\ 1^\circ,\ 2^\circ$，我們會有

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x^2 + x + 1) e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} + 0 + \sqrt{\pi} = \frac{3\sqrt{\pi}}{2}$$