微乙小考三 (2017/10/26)

1. (8分) (a) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$. 求 $f'(x)$.　　　(b) $g(x) = \ln \ln x$. 計算 $g'(5)$.

　　sol:　(a) $f'(x) = \frac{\cos x(\cos x) - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

　　　　(b) $g'(x) = \frac{1}{\ln x} \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln x}$, $g'(5) = \frac{1}{5 \ln 5}$

2. (6分) 試求 $f(x) = (1+2x)^{10}$ 在 $x=0$ 時的線性逼近，並計算 1.004^{10}.

　　sol:　$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$

　　　　$f'(x) = \frac{d(1+2x)^{10}}{dx} = \frac{2d(t)^{10}}{dt} \underset{\frac{dt}{dx}=2}{\overset{t=1+2x}{=\!=\!=\!=}} 2*10t^9 = 20(1+2x)^9$

　　　　$f(0) = 1$, $f'(0) = 20 \Rightarrow f(x) \approx 1 + 20x$ (when $f(x)$ around 0)

　　　　$1.004^{10} = (1 + 2*0.002)^{10} \approx 1 + 20*0.002 = 1 + 0.004 = 1.04$

3. (6分) 用隱函數微分求 $x^3 + y^3 = 2$ 在點 $(1,1)$ 的切線方程式。

　　sol:　$3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x^2}{y^2} \Rightarrow y'(1,1) = -1$

　　　　$(y-1) = -(x-1) \Rightarrow y = -x + 2$.