8.4 Poisson分配與指數分配

習題解答 **8.4.1.**

(1) $\mathrm{P}(k,T)=\dfrac{(\lambda T)^k}{k!}e^{-\lambda T}$, 所以

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{P}(k,T)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda T)^k}{k!}e^{-\lambda T}=e^{-\lambda T}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda T)^k}{k!}=e^{-\lambda T}\cdot e^{\lambda T}=1$$

(2) $\mathrm{P}_X(k)=\dfrac{m^k}{k!}e^{-m}$, 則

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= 1\cdot\frac{m}{1!}e^{-m}+2\cdot\frac{m^2}{2!}e^{-m}+3\cdot\frac{m^3}{3!}e^{-m}+4\cdot\frac{m^4}{4!}e^{-m}+\cdots\\
&= me^{-m}\big(1+m+\frac{m^2}{2!}+\frac{m^3}{3!}+\cdots\big)=me^{-m}\cdot e^m=m\\
\mathrm{E}(X^2) &= 1^2\cdot\frac{m}{1!}e^{-m}+2^2\cdot\frac{m^2}{2!}e^{-m}+3^2\cdot\frac{m^3}{3!}e^{-m}+4^2\cdot\frac{m^4}{4!}e^{-m}+\cdots\\
&= me^{-m}\big(1+2m+3\frac{m^2}{2!}+4\frac{m^3}{3!}+\cdots\big)\\
&= me^{-m}\big(1+(m+m)+(\frac{m^2}{2!}+2\frac{m^2}{2!})+(\frac{m^3}{3!}+3\frac{m^3}{3!})+\cdots\big)\\
&= me^{-m}\big((1+m+\frac{m^2}{2!}+\frac{m^3}{3!}+\cdots)+m(1+m+\frac{m^2}{2!}+\frac{m^3}{3!}+\cdots)\big)\\
&= me^{-m}\cdot(e^m+me^m)=m+m^2\\
\mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}(X)^2=m+m^2-m^2=m
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{習題解答}}$ **8.4.2.**

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y=k) &= \mathrm{P}(X_1+X_2=k)=\sum_{i=0}^{k}\mathrm{P}(X_1=i)\cdot\mathrm{P}(X_2=k-i)\\
&= \sum_{i=0}^{k}\frac{m^i}{i!}e^{-m}\cdot\frac{m^{k-i}}{(k-i)!}e^{-m}=e^{-2m}\sum_{i=0}^{k}\frac{m^k}{i!(k-i)!}\\
&= \frac{e^{-2m}m^k}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}=\frac{e^{-2m}m^k}{k!}\Big(\sum_{i=0}^{k}\mathbf{C}_i^k\Big)=\frac{e^{-2m}m^k}{k!}\cdot 2^k\\
&= \frac{(2m)^k}{k!}e^{-2m}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{習題解答}}$ **8.4.3.**

比較相鄰兩點的 $\mathrm{P}(k)$ 如下:

$$\mathrm{P}(k+1)-\mathrm{P}(k)=\frac{m^{k+1}}{(k+1)!}e^{-m}-\frac{m^k}{k!}e^{-m}=\frac{m^k e^{-m}}{(k+1)!}\left(m-(k+1)\right)$$

所以若 m 不是自然數, 則

$$\mathrm{P}(k)>\mathrm{P}(k-1)\ \Leftrightarrow\ \mathrm{P}(k)-\mathrm{P}(k-1)>0\ \Leftrightarrow\ k<m$$

$$\mathrm{P}(k)>\mathrm{P}(k+1)\ \Leftrightarrow\ \mathrm{P}(k+1)-\mathrm{P}(k)<0\ \Leftrightarrow\ k>m-1$$

如果 k^* 是 $m-1$ 與 m 之間的唯一自然數, 則由上得

$$\mathrm{P}(0)<\mathrm{P}(1)<\cdots<\mathrm{P}(k^*-1)<\mathrm{P}(k^*)>\mathrm{P}(k^*+1)>\mathrm{P}(k^*+2)>\cdots$$

若 m 是自然數, 可檢查 $\mathrm{P}(m-1)=\mathrm{P}(m)$, 其他皆類似得

$$\mathrm{P}(0)<\mathrm{P}(1)<\cdots<\mathrm{P}(m-2)<\mathrm{P}(m-1)=\mathrm{P}(m)>\mathrm{P}(m+1)>\cdots$$

結論皆正確.

$\boxed{\text{習題解答}}$ **8.4.4.**

$$\begin{aligned}
P_Z(k) &= \sum_{i+j=k}\frac{m^i}{i!}e^{-m}\cdot\frac{l^j}{j!}e^{-l}=\sum_{i=0}^{k}\frac{m^i}{i!}e^{-m}\cdot\frac{l^{k-i}}{(k-i)!}e^{-l}\\
&= \sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}m^i l^{k-i}\frac{e^{-(m+l)}}{k!}=\frac{e^{-(m+l)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}(\mathbf{C}_i^k m^i l^{k-i})\\
&= \frac{(m+l)^k}{k!}e^{-(m+l)}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{習題解答}}$ **8.4.5.**

由上習題易知 $P_Z(k)=\frac{(nm)^k}{k!}e^{-nm}$.

$\boxed{\text{習題解答}}$ **8.4.6.**

如第三節例,

$$f_Z(t)=\int_0^t\lambda e^{-\lambda(t-s)}\cdot\lambda e^{-\lambda s}\,ds=\lambda^2\int_0^t e^{-\lambda t}=\lambda^2 t e^{-\lambda t}, t>0$$

習題解答 8.4.8.

(1) $m=1$, $\mathrm{P}(k)=\frac{1}{k!}e^{-1}, k=0,1,\cdots \quad \Rightarrow \quad \mathrm{P}(1)=e^{-1}\approx 0.368.$

(2) 因為平均 1 頁 1 個錯誤, 所以平均 4 頁有 4 個錯誤, 取 $m=4$:

$$\mathrm{P}(k)=\frac{4^k}{k!}e^{-4}, k=0,1,\cdots \quad \Rightarrow \quad \mathrm{P}(4)=\frac{4^4}{4!}e^{-4}=\frac{32}{3}e^{-4}\approx 0.195$$

習題解答 8.4.9.

由題意知, 10 天平均發生約 $\frac{10}{30}\times 10=\frac{10}{3}$ 次（假設一個月 30 天）. 故

$$\mathrm{P}(k)=\frac{(\frac{10}{3})^k}{k!}e^{-\frac{10}{3}}, k=0,1,\cdots \quad \Rightarrow \quad \mathrm{P}(1)=\frac{10}{3}e^{-\frac{10}{3}}\approx 0.119$$

習題解答 8.4.11.

由課本, 串聯部分為

$$\begin{aligned} R_{\hat{L}}(t) &= R_1(t)\cdots R_n(t)=e^{-\frac{n}{\mu}t} \\ \mathrm{E}(\hat{L}) &= \int_0^\infty R_{\hat{L}}(t)\,dt=\int_0^\infty e^{-\frac{n}{\mu}t}\,dt=\lim_{b\to\infty}\ -\frac{\mu}{n}e^{-\frac{n}{\mu}t}|_0^b=\frac{\mu}{n} \end{aligned}$$

並聯部分為:

$$\begin{aligned} R_{\hat{L}}(t) &= 1-(1-e^{-\frac{t}{\mu}})^n \\ \mathrm{E}(\hat{L}) &= \int_0^\infty R_{\hat{L}}(t)\,dt=\int_0^\infty 1-(1-e^{-\frac{t}{\mu}})^n\,dt \\ &\overset{\omega=1-e^{-\frac{t}{\mu}}}{=} \mu\int_0^1 \frac{1-\omega^n}{1-\omega}\,d\omega=\mu\int_0^1 1+\omega+\cdots+\omega^{n-1}\,d\omega \\ &= (1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})\mu \end{aligned}$$