7.1 使用指數函數的模型

習題解答 **7.1.1.**

(1) 令 $t_0 = 1980$, 代入課本公式, 得

$$P(1990) = 1803 \cdot e^{\lambda(1990-1980)} \Rightarrow 10\lambda = \ln \frac{2039}{1803} \Rightarrow \lambda \approx 0.0123$$

(2) $P(2012) = 1803 \cdot e^{0.0123\cdot(2012-1980)} \approx 2673$(萬人).

習題解答 **7.1.3.**

設為 t 年前, 則

$$\frac{9}{100} = e^{-0.000122t} \Rightarrow 0.000122\,t = -\ln \frac{9}{100} \Rightarrow t \approx 19737(\text{年})$$

約兩萬年前.

習題解答 **7.1.5.**

(1) 半衰期 45 億年, $\kappa = \frac{\ln 2}{45} \approx 0.0154$ (1/億年), 設其年代為發現時 t 年前, 則

$$\frac{93}{93+7} = e^{-0.0154t} \Rightarrow 0.0154t = -\ln \frac{93}{100} \Rightarrow t \approx 4.71(\text{億年})$$

四捨五入約 4 億 7000 萬年前.

(2) 由題意知

$$\frac{63}{63+37} = e^{-\kappa\cdot 4.7} \Rightarrow 4.7\kappa = -\ln \frac{63}{100} \Rightarrow \kappa \approx 0.098(\text{億年})$$

設其半衰期為 T

$$\frac{1}{2} = e^{-0.098T} \Rightarrow 0.098T = \ln 2 \Rightarrow T \approx 7.073(\text{億年})$$

四捨五入約 7 億年.

習題解答 **7.1.7.**

假設年利率為 1.5%, 則存款倍增所需要的年數約為 $\frac{70}{1.5} = 46.67$, 約 47 年. 若存款利率為 18%, 則存款倍增所需的年數約為 $\frac{70}{18} = 3.89$, 約 4 年.

習題解答 **7.1.8.**

由題意知

$$10 = T(1) = 25 - 30e^{-\alpha\cdot 1} \Rightarrow e^{-\alpha} = \frac{25-10}{30} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \ln 2$$

設最少要在 t 小時前拿出來：

$$\begin{aligned} 15 = 25 - 30e^{-\alpha t} \quad &\Rightarrow \quad e^{-\alpha t} = \tfrac{25-15}{30} = \tfrac{1}{3} \Rightarrow -\ln 2t = -\ln 3 \\ &\Rightarrow \quad t = \tfrac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1.58 \end{aligned}$$

四捨五入約 1.6 小時.

習題解答 **7.1.9.**

原式化為

$$\frac{dp(t)}{dt} = \gamma(d-b)(p^* - p(t)) = -\gamma(b-d)(p(t) - p^*)$$

此方程和牛頓冷確定律的方程相同, 因此解為

$$p(t) = p^* + (p_0 - p^*)e^{-\gamma(b-d)\cdot(t-t_0)}$$

習題解答 7.1.12.

(1) 由題意與課本之解公式可得

$$\begin{aligned}
&1970\text{年：} && 1819=\frac{M}{1+\left(\frac{M}{1995}-1\right)e^{-\lambda M\cdot(-7)}} \ \Rightarrow\ e^{7\lambda M}=\frac{\frac{M}{1819}-1}{\frac{M}{1995}-1}\\
&1984\text{年：} && 2136=\frac{M}{1+\left(\frac{M}{1995}-1\right)e^{-\lambda M\cdot 7}} \ \Rightarrow\ e^{-7\lambda M}=\frac{\frac{M}{2136}-1}{\frac{M}{1995}-1}
\end{aligned}$$

由此兩式可得

$$\begin{aligned}
& 1=e^{7\lambda M}\cdot e^{-7\lambda M}=\frac{\frac{M}{1819}-1}{\frac{M}{1995}-1}\cdot\frac{\frac{M}{2136}-1}{\frac{M}{1995}-1}\\
\Rightarrow\ & \left(\frac{M}{1819}-1\right)\cdot\left(\frac{M}{2136}-1\right)=\left(\frac{M}{1995}-1\right)^2\\
\Rightarrow\ & \frac{M}{1819\cdot 2136}-\frac{1}{1819}-\frac{1}{2136}=\frac{M}{1995^2}-\frac{2}{1995}\quad (M=0\ \text{不合})\\
\Rightarrow\ & M\approx 2518\ \ (\text{萬人})
\end{aligned}$$

再代入上面方程得

$$e^{7\lambda\cdot 2518}=\frac{\frac{2518}{1819}-1}{\frac{2518}{1995}-1}\ \Rightarrow\ \lambda\approx 2.169\times 10^{-5}$$

但

$$\frac{M}{P_0}-1=\frac{2518}{1995}-1\approx 0.2622,\quad \lambda M=2.169\times 10^{-5}\cdot 2518\approx 0.0546$$

由此可得到人口函數為

$$P(t)=\frac{2518}{1+0.2622\cdot e^{-0.0546(t-1977)}}$$

(2) 代入 $t=2012$ 得

$$P(2012)=\frac{2518}{1+0.262\cdot e^{-0.055(2012-1977)}}\approx 2424(\text{萬人})$$

(3) $25180000/36182\approx 696$, 接近 700 但不超過 700.

習題解答 7.1.14.

(1) 在公式代入 $t_0 = 0$ 與 $I_0 = I(0) = \frac{1}{1000}$ 得

$$I(t) = \frac{1}{1 + (\frac{1}{I_0} - 1)e^{-\eta(t-t_0)}} = \frac{1}{1 + 999e^{-\eta t}}$$

(2) 依題意 $\frac{1}{2} = I(t^*) = \frac{1}{1+999e^{-\eta t^*}}$, 所以

$$1 + 999e^{-\eta t^*} = 2 \ \Rightarrow \ e^{-\eta t^*} = \frac{1}{999} \ \Rightarrow \ t^* = \frac{\ln 999}{\eta}$$

(3) η 與 t^* 成反比.

習題解答 7.1.15.

(1) 令 1 月 15 日為起始日 $t_0 = 0$, 則 $I_0 = \frac{5}{2500000} = \frac{1}{500000}$. 由公式與題意得

$$\frac{1}{2} = I(t) = \frac{1}{1 + (500000 - 1)e^{-1.7t}} \ \Rightarrow \ t = \frac{\ln 499999}{1.7} \approx 7.72$$

大約 8 天, 從 1 月 15 日為起算約是 1 月 23 日.

(2) 依題意, 要解出到達人口比率是 $\frac{999}{1000}$ 的時間,

$$\begin{aligned} \frac{999}{1000} = \frac{1}{1 + (500000 - 1)e^{-1.7t}} \quad &\Rightarrow \quad 1000 = 999 + 49999 \cdot 999 \cdot e^{-1.7t} \\ &\Rightarrow \quad t = \frac{\ln(999 \cdot 499999)}{1.7} \approx 11.78 \end{aligned}$$

大約 12 天, 從 1 月 15 日為起算約是 1 月 27 日.

習題解答 7.1.17.

設 H_S, H_W 各為夏天與冬天之室溫, 當然 $H_S > H_W$ （事實上我們要比較的是不同室溫的影響, 夏天和冬天只是比較明顯的代表）. 設 $T_S(t)$ 與 $T_W(t)$ 各自為夏天與冬天在同樣的起始條件解凍某食品之食品溫度函數, 由牛頓冷確定律之公式知

$$\begin{aligned} T_S(t) &= H_S + (T_0 - H_S)e^{-\alpha t} \\ T_W(t) &= H_W + (T_0 - H_W)e^{-\alpha t} \\ \Rightarrow \quad T_S(t) - T_W(t) &= (H_S - H_w) - (H_S - H_w)e^{-\alpha t} \\ &= (H_S - H_w)(1 - e^{-\alpha t}) \\ \Rightarrow \quad (T_S(t) - T_W(t))' &= (H_S - H_w) \cdot \alpha \cdot e^{-\alpha t} > 0 \end{aligned}$$

所以 $T_S(t) - T_W(t)$ 是遞增函數, 且 $T_S(0) - T_W(0) = 0$, 因此夏天的食品溫度 $T_S(t)$ 一直比冬天的食品溫度溫度 $T_W(t)$ 高, 所以也比較容易達成解凍的要求.

$\boxed{\text{習題解答}}$ **7.1.22.**

(1) 方程式為 $P'(t) = \lambda(M - P(t))$, 改寫成人口比率形式, 再利用牛頓冷卻模型求解得

$$\begin{aligned} P'(t) = \lambda(M - P(t)) \quad &\Rightarrow \quad I'(t) = \lambda(1 - I(t)) \\ &\Rightarrow \quad I(t) = 1 + (I(0) - 1)e^{-\lambda(t-t_0)} \end{aligned}$$

或相當於 $P(t) = M - (M - P_0)e^{-\lambda(t-t_0)}$.

(2) 設 $t_0 = 0$, $I_0 = \frac{1}{1000}$, 則解為 $I(t) = 1 + (\dfrac{1}{1000} - 1)e^{-\lambda t} = 1 - \dfrac{999}{1000}e^{-\lambda t}$, 先求 λ:

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{999}{1000}e^{-3\lambda} \ \Rightarrow \ e^{-3\lambda} = \frac{1000}{999} \cdot \frac{1}{2} \ \Rightarrow \ -3\lambda = \ln\frac{500}{999} \ \Rightarrow \ \lambda \approx 0.23$$

假設在 t^* 時, 有 $\frac{95}{100}$ 人知道消息, 則

$$\begin{aligned} \frac{95}{100} = 1 - \frac{999}{1000}e^{-0.23t^*} \quad &\Rightarrow \quad e^{-0.23t^*} = \frac{1000}{999} \cdot \frac{5}{100} = \frac{50}{999} \\ &\Rightarrow \quad t^* = \frac{\ln\frac{50}{999}}{0.23} \approx 13 \end{aligned}$$

但已過 3 天, 所以答案為 $13 - 3 = 10$ 天.

$\boxed{\text{習題解答}}$ **7.1.23.**

(1) $G'(t) = -\lambda G(t) \ \Rightarrow \ G(t) = G_0e^{-\lambda t}$, 當 $t \to \infty$, $G(t) \to 0$, 所以又回到 σ.

(2) 設注射時 $t_0 = 0$, $G_0 = 0$, 由 $G'(t) = \mu - \lambda G(t) = -\lambda(G(t) - \frac{\mu}{\lambda})$, 解得

$$G(t) = \frac{\mu}{\lambda} + (G_0 - \frac{\mu}{\lambda})e^{-\lambda t} = \frac{\mu}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t})$$

當 $t \to \infty$, $G(t) \to \frac{\mu}{\lambda}$, 所以濃度為 $\sigma + \frac{\mu}{\lambda}$.