# 5.7 Lagrange乘子法

**習題解答 5.7.2.**

(4) 求極值函數為 $g(x,y)=x^2+xy+y^2$, 限制函數為 $f(x,y)=x^2+y^2-1$, 由 Lagrange 乘子法

$$\begin{cases} 2x+y &= \lambda\cdot 2x \\ x+2y &= \lambda\cdot 2y \\ x^2+y^2 &= 1 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} (1-\lambda)x+\dfrac{y}{2} &= 0 \\ \dfrac{x}{2}+(1-\lambda)y &= 0 \end{cases}$$

顯然解 $(0,0)$ 不合限制條件, 因此

$$\frac{1-\lambda}{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\lambda}\ \Rightarrow\ (1-\lambda)^2=(\frac{1}{2})^2\ \Rightarrow\ \lambda=\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}$$

當

$$\begin{aligned} \lambda=\frac{3}{2} \quad&\Rightarrow\quad y=x \quad\Rightarrow\quad (x,y)=(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}) \\ \lambda=\frac{1}{2} \quad&\Rightarrow\quad y=-x \quad\Rightarrow\quad (x,y)=(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}}) \end{aligned}$$

由作圖知, $g(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{3}{2}$ 為最大值, $g(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{1}{2}$ 為最小值

**習題解答 5.7.3.**

(1) 由前第六節習題知, 在 $x^2+y^2\le 1$ 內部有兩候選點, 且 $f(\frac{1}{\sqrt{2}},0)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$ 是極大值, $f(-\frac{1}{\sqrt{2}},0)=-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$ 是極小值.

現檢驗邊界的情況, 求極值函數為 $g(x,y)=xe^{-(x^2+y^2)}$,

限制函數為 $f(x,y)=x^2+y^2-1$, 由 Lagrange 乘子法

$$\begin{cases} (1-x^2)e^{-(x^2+y^2)} &= \lambda\cdot 2x \\ -2xye^{-(x^2+y^2)} &= \lambda\cdot 2y \\ x^2+y^2 &= 1 \end{cases}$$

於第一式和第二式得

$$(1-x^2)e^{-(x^2+y^2)}\cdot y=-2xye^{-(x^2+y^2)}\cdot x\ \Rightarrow\ y=0\ \Rightarrow\ x=\pm 1$$

所以邊界的極值發生在 $(x,y)=(\pm 1,0)$, 且 $g(\pm 1,0)=\pm e^{-1}$.

但 $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}>e^{-1}$, $-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}<-e^{-1}$, 所以最大值為 $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$, 最小值為 $-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$.

習題解答 **5.7.7.**

極值函數為 $g(x,y,z) = ax+by+cz$, 限制函數為 $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$, 由 Lagrange 乘子法

$$\left\{\begin{array}{rcl} a &=& \lambda\cdot 2x \\ b &=& \lambda\cdot 2y \\ c &=& \lambda\cdot 2z \\ x^2+y^2+z^2 &=& 1 \end{array}\right. \Rightarrow\ x=\frac{a}{2\lambda},\ \ y=\frac{b}{2\lambda},\ \ z=\frac{c}{2\lambda}$$

上面結果是因為 $\lambda$ 不可能為 0. 代入第四式得

$$\begin{aligned} (\frac{a}{2\lambda})^2+(\frac{b}{2\lambda})^2+(\frac{a}{c\lambda})^2=1 \quad &\Rightarrow \quad \frac{a^2+b^2+c^2}{4\lambda^2}=1 \\ &\Rightarrow \quad \lambda=\pm\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2} \\ &\Rightarrow \quad (x,y,z)=\pm\frac{(a,b,c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{aligned}$$

得

$$g\Big(\frac{\pm(a,b,c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\Big)=\pm\frac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

最大值為 $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$；最小值為 $-\dfrac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

**習題解答 5.7.8.**

極值函數為 $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, 限制函數為 $f(x,y,z) = z-(4x^2+y^2-1)$, 由 Lagrange 乘子法

$$\begin{cases} 2x &= \lambda\cdot(-8x) \\ 2y &= \lambda\cdot(-2y) \\ 2z &= \lambda\cdot 1 \\ z &= 4x^2+y^2+1 \end{cases}$$

由第一式得 $\lambda=-\frac{1}{4}$ 或 $x=0$.

$$\begin{aligned} \lambda=-\frac{1}{4} &\Rightarrow y=0,\ z=-\frac{1}{8} \\ &\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{7}{32}} \\ &\Rightarrow (x,y,z)=(\pm\sqrt{\frac{7}{32}},0,-\frac{1}{8}) \end{aligned}$$

當 $x=0$, 由第二式得 $\lambda=-1$ 或 $y=0$.

$$\begin{aligned} \lambda=-1 &\Rightarrow z=-\frac{1}{2} \\ &\Rightarrow y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ &\Rightarrow (x,y,z)=(0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2}) \\ y=0 &\Rightarrow z=-1 \\ &\Rightarrow (x,y,z)=(0,0,-1) \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} &g(\pm\sqrt{\frac{7}{32}},0,-\frac{1}{8})=\frac{7}{32}+\frac{1}{64}=\frac{15}{64} \Rightarrow \text{距離為}\sqrt{\frac{15}{64}} \\ &g(0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \Rightarrow \text{距離為}\frac{\sqrt{3}}{2}>\sqrt{\frac{15}{64}} \\ &g(0,0,-1)=1 \Rightarrow \text{距離為}1>\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

所以最短距離為 $\sqrt{\frac{15}{64}}$.

**習題解答 5.7.11.**

已知 $\sqrt{g(0,\pm2,0)}=2$, 現以 $0,2,0$ 為例, 考慮在曲面 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+z^2=1$ 上過 $(0,2,0)$ 的兩條曲線：$(3\sin t,2\cos t,0)$ 與 $(0,2\cos s,\sin s)$, 當 $t=0$ 和 $s=0$ 時, 兩曲線都過 $(0,2,0)$ 點. 又檢查此兩曲線與原點的距離為

$$\begin{aligned} &\sqrt{(3\sin t)^2+(2\cos t)^2+0^2}=\sqrt{9\sin^2 t+4\cos^2 t}=\sqrt{4+5\sin^2 t}\geq 2 \\ &\sqrt{(0^2+(2\cos t)^2+\sin t)^2}=\sqrt{4\cos^2 t+\sin^2 t}=\sqrt{4-3\sin^2 t}\leq 2 \end{aligned}$$

因此在 $(0,2,0)$ 附近, 有些點與原點距離 $>2$, 有些點與原點距離 $<2$, 所以是鞍點. 同理 $(0,-2,0)$ 也可一樣說明.

**習題解答 5.7.19.**

(1) $g(x,y)=x^\alpha+y^\beta$, $x,y>0$. 由隱微分得

$$\begin{aligned}
&\alpha x^{\alpha-1}+\beta y^{\beta-1}y'=0\\
\Rightarrow\quad & y'=-\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\beta y^{\beta-1}}<0\\
\text{再微分}\quad & \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}+\beta(\beta-1)y^{\beta-2}(y')^2+\beta y^{\beta-1}y''=0\\
\Rightarrow\quad & y''=\frac{-1}{\beta y^{\beta-1}}\big(\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}+\beta(\beta-1)y^{\beta-2}(y')^2\big)>0
\end{aligned}$$

其中用到 $\alpha-1<0$, $\beta-1<0$. 由此證得, $x^\alpha+y^\beta=C$ 遞減且凹向上.

(2) 1. $(\alpha,\beta)=(\frac{1}{2},\frac{1}{3})$. 由極值條件得

$$\frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{P_x}=\frac{\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}}{P_y}\quad\Rightarrow\quad y=\Big(\frac{2P_x}{3P_y}\Big)^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{4}}$$

隨著 $C$ 變大, 會往 $X$ 偏袒.

2. $(\alpha,\beta)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. 由極值條件得

$$\frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{P_x}=\frac{\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}}{P_y}\quad\Rightarrow\quad y=\Big(\frac{P_x}{P_y}\Big)^{2}x$$

隨著 $C$ 變大, 無偏袒.

3. $(\alpha,\beta)=(\frac{1}{3},\frac{1}{2})$. 由極值條件得

$$\frac{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{P_x}=\frac{\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}}{P_y}\quad\Rightarrow\quad y=\Big(\frac{3P_x}{2P_y}\Big)^{2}x^{\frac{4}{3}}$$

隨著 $C$ 變大, 會往 $Y$ 偏袒.

(3) 一般情況

$$\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{P_x}=\frac{\beta y^{\beta-1}}{P_y}\quad\Rightarrow\quad y=\Big(\frac{\beta P_x}{\alpha P_y}\Big)^{\frac{1}{1-\beta}}x^{\frac{1-\alpha}{1-\beta}}$$

由此可得

$$\begin{aligned}
\alpha>\beta\quad\Rightarrow\quad 1-\alpha<1-\beta\ \Rightarrow\ \tfrac{1-\alpha}{1-\beta}<1\ \Rightarrow\ \text{向 } X \text{ 偏袒}\\
\alpha<\beta\quad\Rightarrow\quad 1-\alpha>1-\beta\ \Rightarrow\ \tfrac{1-\alpha}{1-\beta}>1\ \Rightarrow\ \text{向 } Y \text{ 偏袒}
\end{aligned}$$