3.1 積分的觀念: 黎曼和與定積分

習題解答 3.1.2.

(1) 將 $[a,b]$ 等分割成 N 段, $\Delta x = \frac{b-a}{N}$, 且取 $\xi_i = a + (i-1)\frac{b-a}{N}$.

$$\begin{aligned}\int_a^b c\,dx &= \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)\Delta x = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} c\cdot\frac{b-a}{N}\\ &= \lim_{N\to\infty} c(b-a) = c(b-a)\end{aligned}$$

(2) 將 $[a,b]$ 等分割成 N 段, $\Delta x = \frac{b-a}{N}$, 且取 $\xi_i = a + i\frac{b-a}{N}$.

$$\begin{aligned}\int_a^b x\,dx &= \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}(a+i\frac{b-a}{N})\frac{b-a}{N}\\ &= a(b-a) + \lim_{N\to\infty}\Big((\frac{b-a}{N})^2\cdot\frac{N(N+1)}{2}\Big)\\ &= a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} = \frac{1}{2}(b^2-a^2)\end{aligned}$$

(3) 將 $[a,b]$ 等分割成 N 段, $\Delta x = \frac{b-a}{N}$, 且取 $\xi_i = a + i\frac{b-a}{N}$.

$$\begin{aligned}\int_a^b x^2\,dx &= \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}(a+i\frac{b-a}{N})^2\Delta x\\ &= \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}(a^2+\frac{2a(b-a)}{N}i+(\frac{b-a}{N})^2 i^2)\cdot\frac{b-a}{N}\\ &= a^2(b-a) + \lim_{N\to\infty}\Big(\frac{2a(b-a)^2}{N^2}\cdot(\sum_{i=1}^{N} i) + \frac{(b-a)^3}{N^3}\cdot(\sum_{i=1}^{N} i^2)\Big)\\ &= a^2(b-a) + \lim_{N\to\infty}\Big(\frac{2a(b-a)^2}{N^2}\cdot\frac{N(N+1)}{2} + \frac{(b-a)^3}{N^3}\cdot\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}\Big)\\ &= a^2(b-a) + a(b-a)^2 + \frac{(b-a)^3}{3} = \frac{1}{3}\cdot(b^3-a^3)\end{aligned}$$

習題解答 3.1.3.

(1) $\dfrac{\int_a^b c\,dx}{b-a} = \dfrac{c(b-a)}{b-a} = c$

(2) $\dfrac{\int_a^b x\,dx}{b-a} = \dfrac{\frac{1}{2}(b^2-a^2)}{b-a} = \dfrac{a+b}{2}$

(3) $\dfrac{\int_a^b x^2\,dx}{b-a} = \dfrac{\frac{1}{3}(b^3-a^3)}{b-a} = \dfrac{a^2+ab+b^2}{3}$

習題解答 3.1.8.

假設用黎曼和 $\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)\Delta x$ 逼近原函數圖形面積, 當整個被積分區域被放大成原來的兩倍時，本來黎曼和中的長方形的底 Δx 和高 $f(\xi_i)$ 都被放大兩倍，因此新黎曼和為

$$\sum_{i=1}^{N}(2f(\xi_i))\cdot(2\Delta x) = 4\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)\Delta x$$

也就是説新黎曼和為原黎曼和之四倍, 隨著 $N\to\infty$, 可得新面積等於原面積之四倍.

習題解答 3.1.9.

因為在 $0 \le x \le x$ 時,

$$1+0^2 \le 1+x^2 \le 1+a^2 \;\Rightarrow\; \frac{1}{1+a^2} \le \frac{1}{1+x^2} \le 1$$

由基本性質 (4) 知

$$\frac{a}{1+a^2} = \int_0^a \frac{1}{1+a^2}\,dx \le \int_0^a \frac{1}{1+x^2}\,dx \le \int_0^a 1\,dx = a$$

習題解答 3.1.10.

因為當 $0 \le x \le 1$ 時, $\sin x^2 < 1$, 所以 $\int_0^1 \sin x^2\,dx < \int_0^1 1\,dx = 1$, 故不可能等於 2.

習題解答 3.1.11.

由平均值定理知道當 $x \ge 0$ 時, $(1+x)^{\frac{1}{3}} \le 1+\dfrac{x}{3}$, 所以 $(1+x^2)^{\frac{1}{3}} \le 1+\dfrac{x^2}{3}$, 因此

$$\int_0^1 (1+x^2)^{\frac{1}{3}}\,dx \le \int_0^1 1+\frac{x^2}{3}\,dx = \int_0^1 1\,dx + \frac{\int_0^1 x^2\,dx}{3} = 1+\frac{1}{9}$$

習題解答 3.1.13.

因為 $m \le f(x) \le M$, 所以

$$\begin{aligned} & \frac{\int_a^b m\,dx}{b-a} \le \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \le \frac{\int_a^b M\,dx}{b-a} \\ \Rightarrow\quad & \frac{m(b-a)}{b-a} \le \bar{f} \le \frac{M(b-a)}{b-a} \\ \Rightarrow\quad & m \le \bar{f} \le M \end{aligned}$$

習題解答 3.1.14.

若在 $[a,b]$ 中沒有任何點 c 滿足 $f(c)=\bar{f}$, 又因為 $y=f(x)$ 是連續函數, 因此只有兩種可能：(1) 對所有 $a \le x \le b$, $f(x) < \bar{f}$; (2) 對所有 $a \le x \le b$, $f(x) > \bar{f}$. 但

$$f(x) < \bar{f} \;\Rightarrow\; \bar{f} = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} < \frac{\int_a^b \bar{f}\,dx}{b-a} = \bar{f}$$

得到顯然的矛盾, 因此 (1) 不可能；同理, (2) 也不可能. 這表示原先沒有任何點 c 滿足 $f(c)=\bar{f}$ 的假設錯誤, 所以必有一點 c, 使得 $f(c)=\bar{f}$.