2.5 微分的應用-最佳化

習題解答 2.5.1.

由計算知 $f(3)=24$, $f(-3)=-24$, 因此

$$f(3) > f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) > f(\frac{1}{\sqrt{3}}) > f(-3)$$

由於所考慮的定義域是 $-3 < x \leq 3$, 所以最大值為 24, 但無最小值.

習題解答 2.5.3.

(1) 邊際成本最小：本題即要計算 $C'(x)$ 的極小值.

$$C''(x) = (\frac{3x^2}{10000} - \frac{3x}{10} + 175)' = \frac{6}{10000}x - \frac{3}{10} = 0$$

則 $x = 500$. 又 $C'(x)$ 為二次方程, 易知此極值為最小值.

(2) 平均成本最小：

$$(\frac{C(x)}{x})' = \frac{C'(x)\cdot x - C(x)}{x^2} = 0$$

計算 $C'(x)\cdot x - C(x) = 0$ 得

$$x\cdot(\frac{2}{10000}x^2 - \frac{2}{10}x + 175) - \frac{x^3}{10000} - \frac{3}{20}x + 175x + 50000 = 0$$

化簡得

$$\frac{2}{10000}x^3 - \frac{3}{20}x^2 - 50000 = 0 \Rightarrow \frac{2}{10000}(x-1000)(x^2-250x-250000) = 0$$

故 $x = 1000$.

習題解答 2.5.4.

$xC'(x) - C(x) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{C}{x}\cdot\frac{1}{C'(x)} = 1$, 故得.

習題解答 2.5.5.

$(x(400-\frac{x}{5}))' = 0 \Rightarrow 400 - \frac{2}{5}x = 0 \Rightarrow x = 1000$, 故在 $x = 1000$ 時最大.

習題解答 2.5.7.

設長方形長為 a 寬為 b. 因為長方形內接於單位圓, 因此 $a^2 + b^2 = 2^2 = 4$. 又長方形面積為

$$A(a) = ab = a\sqrt{4-a^2}, \qquad 0 \leq a \leq 2$$

求極值

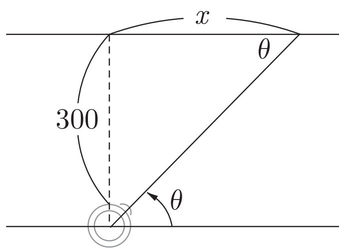
$$A'(a) = \sqrt{4-a^2} + a\cdot\frac{-2a}{2\cdot\sqrt{4-a^2}} = \frac{4-a^2-a^2}{\sqrt{4-a^2}} = 0 \Rightarrow a = \sqrt{2}$$

$a = \sqrt{2}$ 為唯一極值, $A(\sqrt{2}) = 2$, 且 $A(0) = A(2) = 0$, 因此是最大值.

習題解答 **2.5.9.**

如圖知, x 與 θ 的關係為

$$x = 300\cot\theta$$



因為探照燈轉速為 2 圈/m $=$ 4π 1/m, 假設 $t=0$ 時光照正右方且逆時鐘旋轉, 則

$$x(t) = 300\cot(4\pi t)$$

$x(t)$ 是週期函數, 可以只考慮 $0 < t < \dfrac{1}{4}$ （即 15 秒內, 光點會從最右邊掃到最左邊）.

(1) 光點移動速度為

$$v = x'(t) = -300\cdot(4\pi)\cdot\csc^2(4\pi t) = -1200\pi\cdot(1+\cot^2(4\pi t))$$

由於 $x = 300\cdot(4\pi t)$ 代入速度公式, 可得速度 v 和 x 的關係為

$$v(x) = -4\pi\cdot 300\cdot\left(1+\left(\frac{x}{300}\right)^2\right) = -4\pi\left(300+\frac{x^2}{300}\right)$$

(2) 光點移動最慢發生在

$$\begin{aligned} v'(t) = 0 \quad &\Rightarrow \quad v'(t) = 300\cdot 4\pi\cdot 4\pi\cdot\cot(4\pi t)\csc(4\pi t) = 0 \\ &\Rightarrow \quad 4\pi t = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

由於 $t\to 0$ 或 $\dfrac{1}{4}$ 時, $v(t)$ 皆趨於無窮快, 因此 $t=\dfrac{1}{8}$ 光點速度最慢, 此時 $x=0$, 也就是牆離光點最近之處.

習題解答 **2.5.10.**

設正方形邊長為 a, 高為 h, 由題意知 $a^2h = 4000$. 鐵箱重量和表面積成正比, 但表面積為

$$(a^2+4ah) = a^2 + 4a\cdot\frac{4000}{a^2} = a^2 + \frac{16000}{a}$$

令鐵箱重量為

$$W(a) = C\cdot(a^2+\cdot\frac{16000}{a}), \qquad a>0, \text{且 } C>0 \text{ 為常數}$$

先求極值

$$W'(a) = 2a - \frac{16000}{a^2} = \frac{2a^3-16000}{a^2} = 0 \quad\Rightarrow\quad a^3 = 8000 \quad\Rightarrow\quad a = 20$$

由於 $W(a)$ 只有一候選點, 且當 $a\to 0$ 或 ∞ 時, $W(a)$ 皆趨於無窮, 因此 $a=20$ 時必為最小值. 即底長 20, 高 10.

$\boxed{\text{習題解答}}$ **2.5.14.**

(1) 設將票價調漲為 $1200+10\lambda$ 元, 則獲益為

$$R(\lambda)=(1200+10\lambda)(10000-125\lambda)=1250(9600-40\lambda-\lambda^2)$$

此二次式有極大值, 且發生在

$$R'(\lambda)=1250(-40-2\lambda)=0\Rightarrow\lambda=-20$$

因此應將票價減為 $1200-10\cdot 20=1000$ 元, 可有最大獲益, 此時乘客為 12500 人.

(2) 由於人數有限制, 上限 12000 人, 相當於 $\lambda=-16$, 因此本題相當於求底下函數的最大值

$$R(\lambda)=1250(9600-40\lambda-\lambda^2)\qquad \lambda\geq -16$$

但由 (1) 知二次函數 $R(\lambda)$ 在此範圍無極值, 因此最大值發生在邊界 $\lambda=-16$ 上. 因此應將票價減為 $1200-10\cdot 16=1040$ 元, 可有最大獲益, 此時乘客為 12000 人.

$\boxed{\text{習題解答}}$ **2.5.15.**

(1) 主要是說明倉儲的成本大約是 $0.2\cdot\frac{1}{2}x\cdot\frac{x}{100}$. 估且假設出送入倉庫的貨量為 $x=100N$, 則倉儲的總量為

$$\begin{aligned}&100N+100(N-1)+\cdots+100=100\frac{N(N+1)}{2}\\ =\ &100\cdot\frac{x}{100}\cdot(\frac{x}{100}+1)\cdot\frac{1}{2}\approx\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{100}\end{aligned}$$

所以倉儲成本約為 $0.2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{100}$.

(2) 因為要求的是全年的極小值, 因此欲求極值的函數可估計為

$$C(x)\cdot\frac{365}{\frac{x}{100}}=\frac{C(x)}{x}\cdot 36500$$

所以要極小化的是 $\frac{C(x)}{x}$.

(3)

$$\begin{aligned}&(\frac{C(x)}{x})'=\frac{xC'(x)-C(x)}{x^2}=0\\ \Rightarrow\ &x(10+\frac{2x}{1000})-(1000+10x+\frac{x^2}{1000})=0\\ \Rightarrow\ &\frac{x^2}{1000}-1000=0\ \Rightarrow\ x=1000,-1000(\text{不合})\end{aligned}$$

(4) 依題意知, $C(x)=\alpha+\beta x+\gamma\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{100}$

$$\begin{aligned}&xC'(x)-C(x)=0\\ \Rightarrow\ &x(\beta+\frac{\gamma x}{100})=\alpha+\beta x+\frac{\gamma x^2}{200}\\ \Rightarrow\ &\frac{\gamma x^2}{200}=\alpha\ \Rightarrow\ x=\sqrt{\frac{200\alpha}{\gamma}}\quad(\text{負不合})\end{aligned}$$

答案與 β 無關.