2.2 平均值定理

習題解答 **2.2.2.**

(1) 令 $f(x)=(1+x)^r$, 設 $x>0$ 由平均值定理知

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{(1+x)^r-1}{x}=r(1+\xi)^{r-1},\quad 0<\xi<x$$

但是 $0<r<1 \Rightarrow r-1<0$, 故 $(1+\xi)^{r-1}<1$, 所以 $r(1+\xi)^{r-1}<r$, 因此由 $x>0$ 得

$$\frac{(1+x)^r-1}{x}=r(1+\xi)^{r-1}<r \quad\Rightarrow\quad (1+x)^r<1+rx$$

當 $-1<x<0$ 時, 此時 $-1<x<\xi<0$, 因此 $(1+\xi)^{r-1}>1 \Rightarrow r(1+\xi)^{r-1}>r$, 由 $x<0$ 得

$$\frac{(1+x)^r-1}{x}=r(1+\xi)^{r-1}>r \quad\Rightarrow\quad (1+x)^r<1+rx$$

(2) 令 $f(x)=(1+x)^r$, 設 $x>0$ 由平均值定理知

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{(1+x)^r-1}{x}=r(1+\xi)^{r-1},\quad 0<\xi<x$$

但是 $r<0$ 且 $(1+\xi)^{r-1}<1$, 所以 $r(1+\xi)^{r-1}>r$, 因此由 $x>0$ 得

$$\frac{(1+x)^r-1}{x}=r(1+\xi)^{r-1}>r \quad\Rightarrow\quad (1+x)^r>1+rx$$

事實上當 $-1<x<0$ 時也正確, 此時 $-1<x<\xi<0$, 因此 $(1+\xi)^{r-1}>1 \Rightarrow r(1+\xi)^{r-1}<r$, 由 $x<0$ 得

$$\frac{(1+x)^r-1}{x}=r(1+\xi)^{r-1}<r \quad\Rightarrow\quad (1+x)^r>1+rx$$

習題解答 **2.2.3.**

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx=\tan^{-1}x+C$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\sin^{-1}x+C$

(3) $\displaystyle\int \sin x\,dx=-\cos x+C$

習題解答 **2.2.6.**

位移函數 $s(t)$ 是 $v(t)$ 的反導函數, 所以

$$s(t)=\int \sin t\,dt=-\cos t+C$$

但由題意, $s(0)=0 \Rightarrow -1+C=0 \Rightarrow C=1$, 所以 $s(t)=1-\cos t$, 當 $t=\pi$ 時, 車子正好走到最遠點, 距離是 $1-\cos\pi=2$.

習題解答 **2.2.8.**

令 $f(x) = x - \tan^{-1}x$, 則 $f(x)$ 顯然有一解 $x = 0$. 假設 $a \neq 0$ 是另一解, 由 Rolle 定理知存在 ξ 在 0 與 a 之間使得 $f'(\xi) = 0$. 但

$$f'(\xi) = 1 - \frac{1}{1+\xi^2} = \frac{\xi^2}{1+\xi^2} > 0, \qquad \xi \neq 0$$

得到矛盾, 故假設錯誤, 因此 $x = 0$ 是唯一解, 也就是說 $y = x$ 和 $y = \tan^{-1}x$ 只有一交點.

習題解答 **2.2.9.**

(1) 令 $f(x) = \ln x$, 假設 $0 < a < b$, 由平均值定理得

$$\frac{\ln b - \ln a}{b - a} = \frac{1}{\xi}, \qquad a < \xi < b$$

但 $a < \xi < b \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{a}$, 所以

$$\frac{1}{b} < \frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{a} \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{a}{b} < \ln b - \ln a < \frac{b}{a} - 1$$

注意若將此式同乘 -1, 得

$$\frac{a}{b} - 1 > \ln a - \ln b > 1 - \frac{b}{a}$$

形式相同, 表示此不等式對任何 $a \neq b$, a, $b > 0$ 皆正確.

(2) 由上式令 $x = \frac{b}{a}$, 可得不等式

$$1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1, \qquad x > 0,\ x \neq 1$$

令 $x = 1 + r$, 代入得

$$1 - \frac{1}{1+r} = \frac{r}{1+r} < \ln(1+r) < r, \qquad r > -1,\ r \neq 0$$

習題解答 **2.2.10.**

將實根由小到大排列 $r_1 < r_2 < \cdots < r_k$, 由 Rolle 定理知在 r_i 與 r_{i+1} 之間（其中 $i = 1, 2, \cdots, k-1$）, 至少有一 ξ_i 滿足 $f'(\xi_i) = 0$, 因此 $f'(x)$ 至少有 $k-1$ 根 $\xi_i < \xi_2 < \cdots < \xi_{k-1}$.

習題解答 **2.2.11.**

由上習題, 若 $f(x)$ 有 k 相異實根, 則 $f'(x)$ 至少有 $k-1$ 相異實根; 又 $f''(x) = (f'(x))'$, 再用一次習題性質, 知 $f''(x)$ 至少有 $(k-1)-1 = k-2$ 相異實根; 但 $f'''(x) = (f''(x))'$, 再用一次習題性質, 知 $f'''(x)$ 至少有 $(k-2)-1 = k-3$ 相異實根; 以此類推, 可得 $f^{(i)}(x)$ 至少有 $k-i$ 個相異實根. 因此 $f^{(k-1)}(x) = 0$ 必至少有 1 實根.