1.3 反函數

習題解答 1.3.1.

(1) $1-1 \Rightarrow y=b$ 與 $f(x)$ 的函數圖形頂多只交於一點：
若 $y=b$ 與 $f(x)$ 的函數圖形的交點多於一點, 這表示有相異兩點 x_1 與 x_2 滿足 $f(x_1)=b=f(x_2)$, 這違反了 $1-1$ 性質.

(2) $y=b$ 與 $f(x)$ 的函數圖形頂多只交於一點 $\Rightarrow 1-1$：
若 $y=f(x)$ 違反 $1-1$ 性質, 這表示有某兩相異點 $x=p$ 和 $x=q$, 其函數值相等 $f(p)=f(q)$, 若令 b 為此函數值 $f(p)$, 則 $y=b$ 與 $y=f(x)$ 的圖形交於 $(p,f(p))=(p,b)$ 和 $(q,f(q))=(q,b)$ 兩點, 違反了 $y=b$ 與 $f(x)$ 的函數圖形頂多只交於一點的假設.

習題解答 1.3.2.

左、右兩圖是 $1-1$；中圖不是 $1-1$.

習題解答 1.3.3.

(1) $f(1)=0=f(-1)$, 所以 $y=f(x)=x^4-1$ 不是 $1-1$ 函數.

(2) 設 a, b 滿足 $a^3+2a+1=b^3+2b+1$, 則

$$\begin{aligned} a^3-b^3+2(a-b)=0 \quad &\Rightarrow \quad (a-b)(a^2+ab+b^2+2)=0 \\ &\Rightarrow \quad a=b \quad \text{或} \quad a^2+ab+b^2+2=0 \end{aligned}$$

但 $a^2+ab+b^2+2=(a+\frac{b}{2})^2+\frac{3}{4}b^2+2>0$, 除非 $a=b=0$. 所以無論如何皆推得得 $a=b$, 因此 $y=x^3+2x+1$ 是 $1-1$ 函數.

(3) $f(0)=0=f(\pi)$, 所以 $y=f(x)=\sin x$ 不是 $1-1$ 函數.

(4) $f(1)=\log 2=f(-1)$, 所以 $y=f(x)=\log(x^2+1)$ 不是 $1-1$ 函數.

(5) 設 a, b 滿足 $2^a-2^{-a}=2^b-2^{-b}$, 則

$$\begin{aligned} 2^a-2^b+(\tfrac{1}{2^b}-\tfrac{1}{2^a})=0 \quad &\Rightarrow \quad (2^a-2^b)(1+\tfrac{1}{2^a\cdot 2^b})=0 \\ &\Rightarrow \quad 2^a=2^b \quad (\ 1+\tfrac{1}{2^a\cdot 2^b}>0) \\ &\Rightarrow \quad a=b \end{aligned}$$

因此 $y=2^x-2^{-x}$ 是 $1-1$ 函數.

習題解答 1.3.4.

設 $f: A \to B$ 是 $1-1$ 函數, 其中 B 是值域 $\{f(x)|x \in A\}$, 即所有 $f(x)$ 取值的集合. 現定義 $g: B \to A$, 其中對 $b \in B$ 且 $f(a) = b$, 取 $g(b) = a$. 由於 f 是 $1-1$, g 的取值是唯一的, 因此 g 是函數.

由 g 的定義, 顯然 $g(f(x)) = x$ 且 $f(g(x)) = x$, 故知 f 和 g 互為反函數.

習題解答 1.3.5.

(1) 當 $|a| \le 1$, 若 $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ 且 $\sin\theta = a$, 則 $\sin(-\theta) = -a$.
由此得 $\sin^{-1}(-a) = -\theta = -\sin^{-1} a$. 因為 a 任取, 所以可改寫成 x 得

$$\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}(x)$$

(2) 當 $|a| \le 1$, 若 $0 \le \theta \le \pi$ 且 $\cos\theta = a$, 則 $\cos(\pi - \theta) = -a$.
由此得 $\cos^{-1}(-a) = \pi - \theta = \pi - \cos^{-1} a$, 亦即 $\cos^{-1}(a) + \cos^{-1}(-a) = \pi$.
因為 a 任取, 所以可改寫成 x 得

$$\cos^{-1}(x) + \cos^{-1}(-x) = \pi$$

習題解答 1.3.7.

(1) 若 $x \in [-\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi, \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi]$, 則 $2n\pi - x \in [-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$. 所以

$$\begin{aligned} & 2n\pi - x = \sin^{-1}(\sin(2n\pi - x)) = -\sin^{-1}(\sin x) \\ \Rightarrow \quad & x - \sin^{-1}(\sin x) = (2n)\cdot\pi \end{aligned}$$

(2) 若 $x \in [-\dfrac{\pi}{2} + (2n+1)\pi, \dfrac{\pi}{2} + (2n+1)\pi]$, 則 $(2n+1)\pi - x \in [-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$. 所以

$$\begin{aligned} & (2n+1)\pi - x = \sin^{-1}(\sin((2n+1)\pi - x)) = \sin^{-1}(\sin x) \\ \Rightarrow \quad & x + \sin^{-1}(\sin x) = (2n+1)\cdot\pi \end{aligned}$$

習題解答 1.3.8.

(1) 當 $0 \le x$, 這是銳角範圍, 做為補角 $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ 當然成立. 當 $x \le 0$, 由反三角函數的定義可知, $\tan^{-1} x = -\tan^{-1}(-x)$, $\cot^{-1} x = \pi - \cot^{-1}(-x)$, 由此得

$$\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = -\tan^{-1}(-x) + \pi - \cot^{-1}(-x) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

(2) 證明類似, 當 $1 \le x$, 這是銳角範圍, 做為補角 $\sec^{-1}x + \csc^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ 當然成立.
當 $x \le -1$, 由反三角函數的定義可知, $\csc^{-1} x = -\csc^{-1}(-x)$, $\sec^{-1} x = \pi - \sec^{-1}(-x)$, 由此得

$$\csc^{-1} x + \sec^{-1} x = -\csc^{-1}(-x) + \pi - \sec^{-1}(-x) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

習題解答 1.3.10.

(1) $\sin^{-1}\sin(\dfrac{3}{4}\pi) = \sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\pi}{4}$

(6) 當 $x \geq 1$, $\sec^{-1}x$ 的取值 $\in [0, \dfrac{\pi}{2})$, 因此 $\tan\sec^{-1}x$ 的值必 ≥ 0, 但

$$\begin{aligned} 1+\tan^2 x = \sec^2 x \quad &\Rightarrow \quad (\tan\tan^{-1}x)^2 = (\sec\sec^{-1}x)^2 - 1 = x^2 - 1 \\ &\Rightarrow \quad \tan\sec^{-1}x = \sqrt{x^2-1} \end{aligned}$$

當 $x \leq -1$, $\sec^{-1}x$ 的取值 $\in (\dfrac{\pi}{2}, \pi]$, 因此 $\tan\sec^{-1}x$ 的值必 ≤ 0, 同上

$$(\tan\tan^{-1}x)^2 = (\sec\sec^{-1}x)^2 - 1 = x^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad \tan\sec^{-1}x = -\sqrt{x^2-1}$$