1.2 方程式與平面曲線；隱函數

習題解答 1.2.1.

(2)

$$\begin{aligned}(a,b)\in \text{曲線}\,\Gamma \quad &\Leftrightarrow \quad F(a,b)=C\\ &\Leftrightarrow \quad F(-a,b)=C\\ &\Leftrightarrow \quad (-a,b)\in \text{曲線}\,\Gamma\end{aligned}$$

所以 Γ 對 y-軸對稱.

(3)

$$\begin{aligned}(a,b)\in \text{曲線}\,\Gamma \quad &\Leftrightarrow \quad F(a,b)=C\\ &\Leftrightarrow \quad F(-a,-b)=C\\ &\Leftrightarrow \quad (-a,-b)\in \text{曲線}\,\Gamma\end{aligned}$$

所以 Γ 對原點對稱.

習題解答 1.2.2.

(1)

$$y^2=1-x^2 \ \Rightarrow\ y=\pm\sqrt{1-x^2},\quad -1\le x\le 1$$

(2)

$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2} \ \Rightarrow\ y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},\quad -a\le x\le a$$

(3)

$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1 \ \Rightarrow\ y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2},\quad x\le -a \text{ 或 } x\ge a$$

(4)

$$\begin{aligned}y^2-xy+(x^2-1)=0 \quad &\Rightarrow \quad y=\frac{x\pm\sqrt{(-x)^2-4(x^2-1)}}{2}\\ &\Rightarrow \quad y=\frac{x\pm\sqrt{4-3x^2}}{2}\end{aligned}$$

其中 $-\frac{2}{\sqrt{3}}\le x\le \frac{2}{\sqrt{3}}$.

習題解答 **1.2.3.**

(1) 令 $F(x,y)=y-2^x$, 檢查易知 $F(x,y)$ 不滿足性質中之條件, 因此從性質無法判斷此圖形之對稱性.

(2) 令 $F(x,y)=y-\tan x$, 檢查知 $F(X,y)$ 不滿足性質中之條件, 因此從性質無法判斷此圖形之對稱性. 但因為 $y=\tan x$ 是奇函數, 故知其對原點對稱.

(3) 令 $F(x,y)=y-(x^4-x^2+1)$, 檢查知 $F(x,y)=F(-x,y)$ 故圖形對 y-軸對稱.

(4) 令 $F(x,y)=\frac{x^2}{4}-y^2-1$, 檢查知 $F(x,y)=F(-x,y)$, $F(x,y)=F(x,-y)$, $F(x,y)=F(-x,-y)$ 故圖形對 x-軸、y-軸、原點對稱.

(5) 令 $F(x,y)=y^2-4x$, 檢查知 $F(x,y)=F(x,-y)$, 故圖形對 x-軸對稱.

(6) 令 $F(x,y)=x^2-xy+y^2-1$, 檢查知 $F(x,y)=F(-x,-y)$, $F(x,y)=F(y,x)$, 故圖形對原點與 $y=x$ 對稱.

習題解答 **1.2.4.**

由性質的證明知

$$(a,b)\in y=\lambda x+\alpha \text{ 的圖形} \quad \Leftrightarrow \quad (b,a)\in y=\mu x+\beta \text{ 的圖形}$$

亦即

$$b=\lambda a+\alpha \quad \Leftrightarrow \quad a=\mu b+\beta$$

但這相當於 a 和 b 滿足下列方程組, 且有無窮多組解

$$\begin{cases} \lambda a-b &= -\alpha \\ a-\mu b &= \beta \end{cases}$$

由線性方程組的性質知

$$\frac{\lambda}{1}=\frac{-1}{-\mu}=\frac{-\alpha}{\beta}$$

由此可得 $\lambda\cdot\mu=1$ 且 $\lambda\beta+\alpha=0$.

$\boxed{\text{習題解答}}$ **1.2.5.**

(1) 假設 $f(x)$ 的函數圖形對 x-軸對稱. 任找函數圖形上一點 $(a, f(a))$, 由假設 $(a, -f(a))$ 也在函數圖形上, 但同樣的 $x = a$ 只能有一對應之函數值, 因此 $f(a) = -f(a)$, 亦即 $f(a) = 0$, 對任何 a 皆成立.

(2) 令 Γ 表示 $y = f(x)$ 的函數曲線.

$$\begin{aligned}(a,b)\in\Gamma \quad &\Leftrightarrow \quad b = f(a)\\ &\Leftrightarrow \quad b = f(-a) \quad (\text{假設})\\ &\Leftrightarrow \quad (-a,b)\in\Gamma\end{aligned}$$

這表示對任意 (a, b) 在函數曲線 Γ 上, $(-a, b)$ 必定也在函數曲線上, 於是 $y = f(x)$ 的函數圖形對 y-軸對稱.

(3) 令 Γ 表示 $y = f(x)$ 的函數曲線.

$$\begin{aligned}(a,b)\in\Gamma \quad &\Leftrightarrow \quad b = f(a)\\ &\Leftrightarrow \quad -b = -f(a) = f(-a) \quad (\text{假設})\\ &\Leftrightarrow \quad (-a,-b)\in\Gamma\end{aligned}$$

這表示對任意 (a, b) 在函數曲線 Γ 上, $(-a, -b)$ 必定也在函數曲線上, 於是 $y = f(x)$ 的函數圖形對原點對稱.

$\boxed{\text{習題解答}}$ **1.2.6.**

偶函數: $y = \cos x$, $y = x^4 - 1$, $y = 2$.
奇函數: $y = \tan x$, $y = \dfrac{x}{1+x^2}$.
都不是: $y = \log x$.

$\boxed{\text{習題解答}}$ **1.2.7.**

(1) $(\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1$, 所以 $(\cos t, \sin t)$ 是 $x^2 + y^2 = 1$ 的參數式.

(2) 因為 $1+(\tan t)^2 = (\sec t)^2 \quad \Rightarrow \quad (\sec t)^2-(\tan t)^2 = 1$, 所以 $(\sec t, \tan t)$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, 是 $x^2 - y^2 = 1$ 的參數式.

(3) 因為 $\frac{(2\cos t)^2}{4} + (\sin t)^2 = (\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1$, 所以 $(2\cos t, \sin t)$ 是 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的參數式.

(4) 因為 $(t^{\frac{1}{2}})^2 - (t^{\frac{1}{3}})^3 = t - t = 0$, 所以 $(t^{\frac{1}{2}}, t^{\frac{1}{3}})$, $t > 0$, 是 $x^2 - y^3 = 0$ 的參數式.

(5) 因為 $(2(t^3 - t)) = 2 \cdot (t^3 - t)$, 所以 $(t^3 - t, 2(t^3 - t))$ 是 $y = 2x$ 的參數式.

(6) 因為 $(f(t)) - f((t)) = f(t) - f(t) = 0$, 所以 $(t, f(t))$ 是 $y - f(x) = 0$ 的參數式.

$\boxed{\text{習題解答}}$ **1.2.8.**

(5)	(6)	(4)
(2)	(3)	(1)