# 微乙小考三 (2017/4/13)

1. (6分)計算 $\int_0^2 \left(\int_x^2 \cos y^2 dy\right) dx$ 之值。

sol: 由於無法直接對$y$積分，因此我們改變積分順序如下（可以透過高中所學的線性規劃之方法考察其邊界所形成的二元一次不等式來處理）：

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x \leq y \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq y \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

據此可將所求的重積分改寫並計算如下

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left(\int_x^2 \cos y^2 dy\right) dx &= \int_0^2 \int_0^y \cos y^2 dx dy \\ &= \int_0^2 x \cos y^2 \Big|_0^y dy \\ &= \int_0^2 y \cos y^2 dy \\ &= \frac{\sin y^2}{2}\Bigg|_0^2 \\ &= \frac{\sin 4}{2} \end{aligned}$$

2. (7分) 假設 $\Omega$ 是 $\{4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$, $\{x \geq 0\}$ 和 $\{y \geq 0\}$ 在平面上的交集。求 $\iint_\Omega e^{(x^2+y^2)} dA$

sol: 由於區域的形式、被積分函數中出現$x^2 + y^2$，可以推測應使用極座標變換: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$，如此有$x^2 + y^2 = r^2$，故有

$$\begin{cases} \{4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\} \\ \{x \geq 0\} \\ \{y \geq 0\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \{2 \leq r \leq 3\} \\ \left\{0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\} \cup \left\{\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi\right\} \\ \{0 \leq \theta \leq \pi\} \end{cases}$$

其中由後兩式可得範圍為$\left\{0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\}$，因此所求為

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_2^3 e^{r^2} r dr d\theta = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\right)\left(\int_2^3 e^{r^2} r dr\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{r^2}}{2}\Bigg|_2^3 = \frac{(e^9 - e^4)\pi}{4}$$

3. (7分) 試求 $g(x, y) = x^3 - 3xy^2$ 在 $x^2 + y^2 = 9$ 限制條件下的最大值和最小值。

sol: (方法一) 由於$x^2 + y^2 = 9$，因此$y^2 = 9 - x^2$，故$g$函數可以表達如下

$$x^3 - 3x\left(9 - x^2\right) = 4x^3 - 27x$$

其中由限制條件可以留意到$x$介在$-3$至$3$之間（含）。

因此題目可視為令$f\left(x\right)=4x^3-27x$，求$f$在$[-3,3]$之間的最大值與最小值。為此我們解$f'\left(x\right)=12x^2-27=0$，可得$x=\pm\dfrac{3}{2}$，故得

$$f\left(-\frac{3}{2}\right)=27\quad ;\quad f\left(\frac{3}{2}\right)=-27$$

此外最大值與最小值也可能發生在邊界上，因此代入$x=3$與$x=-3$可得$f\left(3\right)=27$、$f\left(-3\right)=-27$。

因此最大值為$27$，而最小值為$-27$。

(方法二) 運用拉格朗日乘子法，設拉格朗日乘子函數$F$為

$$F\left(x,y,\lambda\right)=x^3-3xy^2-\lambda\left(x^2+y^2-9\right)$$

據此解聯立方程組:

$$\begin{aligned}F_x\left(x,y,\lambda\right)=&3x^2-3y^2-2x\lambda=0\\F_y\left(x,y,\lambda\right)=&-6xy-2y\lambda=0\\F_\lambda\left(x,y,\lambda\right)=&-\left(x^2+y^2-9\right)=0\end{aligned}$$

由第二式可得$2y\left(3x+\lambda\right)=0$，故$y=0$或$\lambda=-3x$。

* 若$y=0$，則由第三式可知$x=\pm 3$，即座標為$(3,0)$或$(-3,0)$。
* 若$\lambda=-3x$，則代入第一式可得$9x^2=3y^2$，代入第三式則有$4x^2=9$，因此$x=\pm\dfrac{3}{2}$，而$y=\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$。檢驗可得座標為$\left(\dfrac{3}{2},\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ 或$\left(-\dfrac{3}{2},\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$。

代入座標可發現

$$\begin{aligned}g\left(3,0\right)=g\left(-\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)=g\left(-\frac{3}{2},-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)=27\\g\left(-3,0\right)=g\left(\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)=g\left(\frac{3}{2},-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)=-27\end{aligned}$$

因此最大值為$27$，而最小值為$-27$。