1052 微乙01-05班期中考解答和評分標準

1. (10%) 求 $\ln xy + \sin yz = 0$ 在 $(1,1,0)$ 的切平面方程式。

Solution:

令 $F(x,y,z) = \ln xy + \sin yz = \ln x + \ln y + \sin(yz)$，題目之曲面即方程式 $F(x,y,z) = 0$ 的圖形。 在 $(1,1,0)$ 的切平面法向量即為 $\nabla F(1,1,0)$ 之值。

直接計算可得

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{x}\ , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{y} + \cos(yz)\cdot z\ , \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \cos(yz)\cdot y \quad \text{(6pts)}$$

代入 $(1,1,0)$ 得到 $\nabla F(1,1,0) = (1,1,1)$ (2pts)， 利用點法式可求得切平面方程式為

$$1\cdot(x-1) + 1\cdot(y-1) + 1\cdot(z-0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x+y+z = 2. \quad \text{(2pts)}$$

[另解]

可改寫成 $x = x(y,z)$ 或者 $y = y(x,z)$ 的形式， 計算 $(-1, x_y, x_z)$ 或者 $(y_x, -1, y_z)$ 也可得法向量。等同前面計算 ∇F 的 (6pts) 。

2. (12%) 若在點 (x,y,z) 的溫度可表示為函數 $T(x,y,z)=\dfrac{80}{1+x^2+2y^2+3z^2}$，求在點 $(1,1,-2)$ 沿著那個方向溫度增加最快？其方向導數為何？

Solution:

若在點(x,y,z)的溫度可表示為$T(x,y,z)=\dfrac{80}{1+x^2+2y^2+3z^2}$，求在點$(1,1,-2)$沿著那個方向溫度增加最快？其方向導數為何？

Solution:

(1) (方法一)先求梯度如下

$$\begin{aligned}\nabla T(x,y,z) &= \left(T_x(x,y,z), T_y(x,y,z), T_x(x,y,z)\right)\\ &= \left(\frac{-160x}{\left(1+x^2+2y^2+3z^2\right)^2}, \frac{-320y}{\left(1+x^2+2y^2+3z^2\right)^2}, \frac{-480z}{\left(1+x^2+2y^2+3z^2\right)^2}\right)\end{aligned}$$

因此在點$(1,1,-2)$的梯度為

$$\nabla T(1,1,-2)=\left(-\frac{5}{8},-\frac{5}{4},\frac{15}{4}\right)//(-1,-2,6)$$

因此延$(-1,-2,6)$這個方向溫度會增加最快。

(方法二) 考慮分母並令之為$f(x,y,z)=1+x^2+2y^2+3z^2$，計算其梯度如下

$$\nabla f(x,y,z)=(2x,4y,6z)$$

故在該點的梯度為$\nabla f(1,1,-2)=(2,4,-12)//(1,2,-6)$。因此延$(1,2,-6)$方向會使分母增加最快，故反方向$(-1,-2,6)$會使原函數$T$增加最快。
注意：這個方法由於沒有具體計算T的梯度，因此無法回答方向導數的數值，因此不予推薦。

(2) (方法一) 當沿著最快增加的方向前進時，其方向導數即為

$$\begin{aligned}|\nabla T(1,1,-2)| &= \left|\left(-\frac{5}{8},-\frac{5}{4},\frac{15}{4}\right)\right| = \sqrt{\left(-\frac{5}{8}\right)^2+\left(-\frac{5}{4}\right)^2+\left(\frac{15}{4}\right)^2}\\ &= \sqrt{\frac{1025}{64}}=\frac{5\sqrt{41}}{8}\end{aligned}$$

(方法二) 根據(1)知道最快的前進方向為$\vec{u}=(-1,-2,6)$，因此利用方向導數的計算規則有

$$\begin{aligned}D_{\vec{u}}T(1,1,-2) &= \nabla T(1,1,-2)\cdot\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=\left(-\frac{5}{8},-\frac{5}{4},\frac{15}{4}\right)\cdot\frac{(-1,-2,6)}{\sqrt{41}}\\ &= \frac{205}{8\sqrt{41}}=\frac{5\sqrt{41}}{8}\end{aligned}$$

評分標準：兩小題各為6分。

1. 空白或僅抄寫題目得0分。
2. 計算梯度的偏導數時使用連鎖律或代入數字時產生錯誤扣1至5分不等，視錯誤情況處理。如
   (i) 缺少負號，扣1分；
   (ii) 分母次方錯誤，扣2分，如果知道分母是2次但代入時錯誤僅扣1分；
   (iii) 雖求出梯度，但卻進行向量倍數時誤認為這些向量皆相等者扣1分；
   (iv) 四則運算錯誤或忘記開根號，扣1分。
   (v) 方向相反者扣1分。
3. 僅正確計算偏導數但未能求出梯度者得3分。
4. 如果一開始的偏微分錯誤嚴重，那麼僅視是否瞭解概念/公式酌給1分或2分。
5. 未求方向導數或誤解方向導數者扣6分，但如果有求出真正的方向導數但未能瞭解該值為方向導數者扣3分。
6. 理解方向導數應使用內積但卻與座標/單位化的座標內積者扣4分。

3. (12%) 求函數 $f(x,y) = e^x(x^2 - y^2)$ 的所有極值點候選點並討論其性質(包括鞍點)。

Solution:

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^x(x^2 + 2x - y^2) = 0$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2ye^x = 0$

$\therefore y = 0 \Rightarrow x = 0, -2$

the critical points are $(0,0)$ and $(-2,0)$ (3 points)

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = e^x(x^2 + 4x + 2 - y^2)$

$\Rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2,0) = -2e^{-2}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -2ye^x$

$\Rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-2,0) = 0$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2e^x$

$\Rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = -2,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-2,0) = -2e^{-2}$ (3 points)

$D(0,0) = 2 \cdot (-2) = -4 < 0$

$\Rightarrow (0,0)$ is saddle point (3 points)

$D(-2,0) = -2e^{-2} \cdot (-2e^{-2}) = 4e^{-4} > 0$

$\Rightarrow (-2,0)$ is local maxima (3 points)

4. (14%) 一個扁的橢圓板 $x^2+4y^2 \le 1$ 在 (x,y) 時，有著溫度函數 $T(x,y)=x^2+8y^2-x$。試求此橢圓板上的最高溫與最低溫。過程中必須使用 Lagrange 乘子法。

Solution:

Case 1: when $x^2+4y^2<1$:

We compute the critical point of T: $\vec{\nabla}T(x,y)=0$, we have $\begin{cases} f_x & =2x-1=0 \\ f_y & =16y=0 \end{cases}$

So $(\frac{1}{2},0)$ is a required critical point since $(\frac{1}{2})^2+4(0)^2<1$. **(5%)**

Case 2: When $x^2+4y^2=1$:

By the method of Lagrange multiplier, let $g(x)=x^2+4y^2-1=0$, then we have $\vec{\nabla}T=\lambda\vec{\nabla}g$:

$\begin{cases} 2x-1 & =\lambda(2x) \\ 16y & =\lambda(8y) \\ x^2+4y^2 & =1 \end{cases}$ **(5%)**

From $16y=\lambda(8y)$, we have $\lambda=2$ or $y=0$.

(1)$\lambda=2$: $(x,y)=\left(-\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$**(2%)**

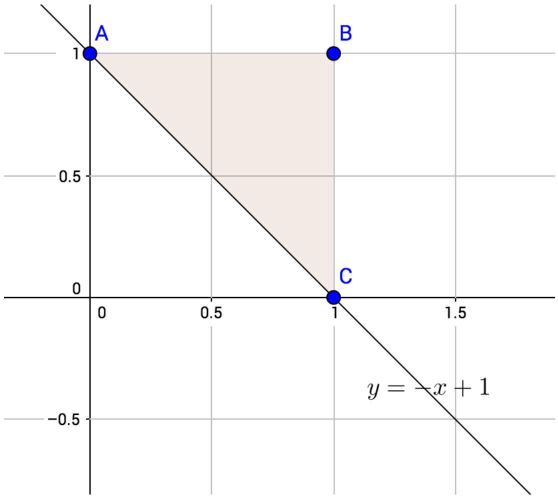
(2)$y=0$: $(x,y)=(\pm1,0)$**(1%)**

And $T(\frac{1}{2},0)=-\frac{1}{4}$, $T(-\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{4})=\frac{9}{4}$, $T(1,0)=0$, $T(-1,0)=2$.

We have the Minimum value of T: $T(\frac{1}{2},0)=-\frac{1}{4}$, and the maximum value of T: $T(-\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{4})=\frac{9}{4}$**(1%)**

5. (10%) 計算積分 $\iint_\Omega (x^2+y^2)dA$，其中 Ω 是由 $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ 此三點所圍成的三角形區域。

Solution:



方法1:

$$\begin{aligned}\int\int_\Omega (x^2+y^2)dA &= \int_0^1 \int_{1-x}^1 (x^2+y^2)dydx \\ &= \int_0^1 \Big(yx^2+\frac{1}{3}y^3\Big|_{y=1-x}^{y=1}\Big)dx \\ &= \int_0^1 (\frac{4}{3}x^3-x^2+x)dx \\ &= (\frac{1}{3}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

方法2:

$$\begin{aligned}\int\int_\Omega (x^2+y^2)dA &= \int_0^1 \int_{1-y}^1 (x^2+y^2)dxdy \\ &= \int_0^1 \Big(xy^2+\frac{1}{3}x^3\Big|_{x=1-y}^{x=1}\Big)dy \\ &= \int_0^1 (\frac{4}{3}y^3-y^2+y)dy \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

配分方式$(4\Sigma+3\Sigma+3\Sigma)$:

1. x的上下限全對2分、 y的上下限全對2分;
2. 第一層積分得出$\int_0^1 (\frac{4}{3}x^3-x^2+x)dx$或$\int_0^1 (\frac{4}{3}y^3-y^2+y)dy$，得3分;
3. 第二層積分正確得出答案1/2，得3分。

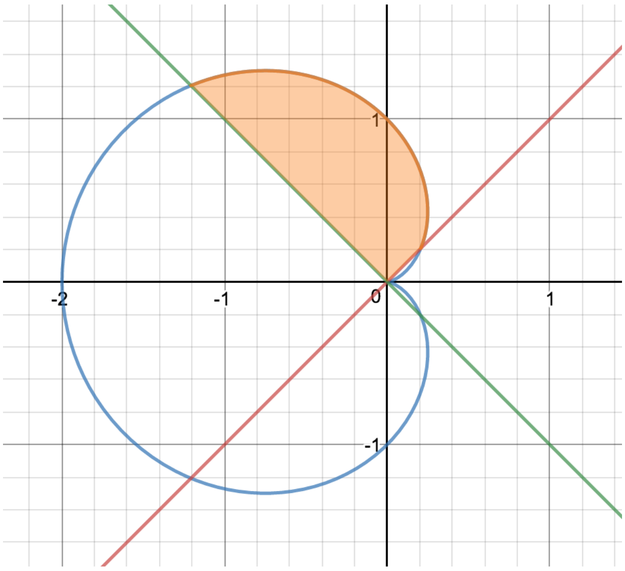
6. (12%) 計算 $\int_0^1 \int_{y^{1/2}}^1 \frac{1}{1+x^3} dx dy$.

Solution:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_{y^{\frac{1}{2}}}^1 \frac{1}{1+x^3} dx dy &= \int_0^1 \int_0^{x^2} \frac{1}{1+x^3} dy dx \qquad \text{(8 points)}\\ &= \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3} dx \qquad \text{(2 points)}\\ &= \frac{1}{3} \ln 2 \qquad \text{(2 points)}\end{aligned}$$

7. (15%) 令 Ω 為一位於上半平面的區域，由 $r = 1 - \cos\theta,\ y = x,\ y = -x$ 所圍。求二重積分 $I = \iint_\Omega \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dA.$

Solution:



使用極座標：$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$，本題積分範圍：$\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{3\pi}{4},\ 0 \le r \le 1 - \cos\theta$

$$\begin{aligned} I &= \int\int_\Omega \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dA \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^{1-\cos\theta} \frac{1}{r} \cdot r dr d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (1 - \cos\theta) d\theta \\ &= (\theta - \sin\theta)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

配分方式：

1. 簡圖 2分；
2. $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$， 2分；
3. $\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{3\pi}{4},\ 0 \le r \le 1 - \cos\theta$， 4分；
4. Jacobian， 2分；
5. 積分5分。

8. (15%) 計算積分 $\iint_\Omega \sqrt{x+2y}(x-y)dA$，其中 Ω 為 $x-y=0,\ x-y=1,\ x+2y=0$ 和 $x+2y=1$ 所圍成的平行四邊形。

Solution:

計算積分 $\iint_\Omega \sqrt{x+2y}\,(x-y)\,dA$，其中$\Omega$為$x-y=0,\ x-y=1,\ x+2y=0$和$x+2y=1$所圍成的平行四邊形。

Solution:令$u=x+2y$、$v=x-y$，則邊界條件可表達為$v=0$、$v=1$、$u=0$、$u=1$，從而原本的重積分可以改寫如下

$$\int_0^1\int_0^1 \sqrt{u}v\left|\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\right|dudv$$

其中$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ 為Jacobian行列式，計算方法有兩種如下:

(i) 根據變數變換，計算Jacobian的倒數:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \left[\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right]^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-3)^{-1} = -\frac{1}{3}$$

(ii) 先解出x、y為$\begin{cases} x = \dfrac{u+2v}{3} \\ y = \dfrac{u-v}{3} \end{cases}$，如此有

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}$$

因此所求的重積分為

$$\frac{1}{3}\int_0^1\int_0^1 \sqrt{u}vdudv = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1\right)\left(\frac{v^2}{2}\Big|_0^1\right) = \frac{1}{9}$$

評分標準:

1. 空白或僅抄寫題目得0分。
2. 未使用變數變換而直接針對原區域分別討論者視情況酌給1至2分（使用此方法者未能有效簡化問題獲得答案，因此未能獲得大部分分數）。
3. 知道要變數變換，但其他過程皆錯誤者僅得3分。
4. 未求Jacobian者扣5分，在求Jacobian的行列式中的四個位置的數字每算錯一個扣1分，有求Jacobian但在變數變換後未代入者扣1分，忘了加絕對值者扣1分，計算(i)卻忽略此為倒數者扣1分;
5. 在(ii)中解x或y錯誤者扣1分，整個解錯者扣5分;
6. 變數變換後的積分區域有u、v之上下界共四項，錯一個扣1分;
7. 積分過程中的計算錯誤每一個扣1分，至多扣5分。