**1052微乙01-05班期末考解答和評分標準**

1. (10%) 解微分方程 $y' = y(y^2-1)$，$y$ 為非常數函數。

**Solution:**

題目要考慮$y$非常數函數，即$y'$不恆為零的解，即$y$不總是為0或$\pm 1$。因此透過移項可得

$$\frac{1}{y\left(y^2-1\right)}\frac{dy}{dt} = 1$$

針對左式使用部分分式，即考慮待定常數$A, B, C$滿足

$$\frac{1}{y\left(y^2-1\right)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y+1} + \frac{C}{y-1}$$

容易解得$A = -1$、$B = C = \frac{1}{2}$，因此題目的微分方程寫為

$$\left(-\frac{1}{y} + \frac{\frac{1}{2}}{y+1} + \frac{\frac{1}{2}}{y-1}\right)\frac{dy}{dt} = 1$$

如此取同不定積分

$$-\ln|y| + \frac{1}{2}\ln|y+1| + \frac{1}{2}\ln|y-1| = t + C$$

根據對數函數的特性可以整理得

$$\frac{1}{2}\ln\frac{\left|y^2-1\right|}{y^2} = t + C$$

即有

$$\frac{\left|y^2-1\right|}{y^2} = C_1e^{2t}$$

此處$C_1 = e^{2C}$為正數。

現在去掉絕對值後$C_1$可為實數，即

$$\frac{y^2-1}{y^2} = C_1e^{2t}$$

如此能夠解出

$$y^2 = \frac{1}{1-C_1e^{2t}}$$

故$y = \left(1-C_1e^{2t}\right)^{-\frac{1}{2}}$或$y = -\left(1-C_1e^{2t}\right)^{-\frac{1}{2}}$。

評分原則:

1. 空白或與題目無關的作答者得0分
2. 未正確移項者得0分或1分（如直接對方程兩邊直接對$y$積分者得0分，而知道要使用分離變數法者得1分）
3. 正確移項後未進行任何處理者得2分；如有處理但不正確者則得3分至5分不等。
4. 同取積分時，等號另一邊為自變數積分，若誤以為對$y$積分者扣1分；若未有積分常數者也扣1分。
5. 忽略絕對值者扣1分。
6. 其餘錯誤扣0分至1分不等（如忽略正負號者扣0分）
7. 未有說明就使用積分因子法者得0分，完整陳述積分因子法如何使用者得1分。

2. (10%) 解微分方程 $x\frac{dy}{dx} = 2y + x^3\ln x,\ x>0,\ y(1) = -1$。

**Solution:**

$$x\frac{dy}{dx} - 2y = x^3\ln x$$
$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = x^2\ln x$$

Integrating factor: $e^{\int -\frac{2}{x}dx} = \frac{1}{x^2}$

$$\therefore \left(\frac{y}{x^2}\right)' = \ln x$$

$$\frac{y}{x^2} = x(\ln x - 1) + c$$

When $y(1) = -1, c = 0$

$$y(x) = x^3(\ln x - 1), x > 0$$

Note:

1. The method of separation of variables cannot be applied here.
2. For the integrating factor, don't leave out the minus sign, $e^{\int \frac{2}{x}dx}$ is wrong.
3. Need to show the process of $\int \ln x dx$

3. (15%) 假設隨機變數 $X$ 的取值是 $\{-1, 0, 1\}$。若 $\mathrm{E}(X) = 0$ 和 $\mathrm{Var}(X) = \frac{2}{3}$，求
   (a) (4%+4%) $P(X = 1)$ 和 $P(X = 0)$
   (b) (7%) $\mathrm{Var}(X^2)$。

**Solution:**

(a) Let $P(X = -1) = a$, $P(X = 0) = b$, $P(X = 1) = c$

$$\begin{cases} a + b + c & = & 1 \\ c - a & = & 0 \\ c + a & = & \frac{2}{3} \end{cases} \text{ (4 points)}$$

$\Rightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$

$\therefore P(X = 1) = P(X = 0) = \frac{1}{3}$ (2+2 points)

(b) $Var(X^2) = E(X^4) - E^2(X^2)$ (3 points)

$E(X^2) = a + c = \frac{2}{3}$ (2 points)

$E(X^4) = a + c = \frac{2}{3}$ (2 points)

$\therefore Var(X^2) = \frac{2}{3} - (\frac{2}{3})^2 = \frac{2}{9}$

4. (10%) 若對所有 $i = 1, 2, \cdots, 10$, $X_i \sim X$, 且 $\{X_1, X_2, \cdots, X_{10}\}$ 是獨立的。假設 $\mathrm{E}(X) = 1$ 和 $\mathrm{Var}(X) = 2$，求
   (a) (5%) $\mathrm{E}(5X_1 \cdot X_2 \cdot \cdots \cdot X_{10})$
   (b) (5%) $\mathrm{Var}\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}}{10}\right)$

**Solution:**

(a) $E(5X_1 \cdot X_2 \cdot \cdots \cdot X_{10})$

$= 5E(X_1) \cdot E(X_2) \cdot \cdots \cdot E(X_{10})$ (4 points)

$= 5$ (1 point)

(b) $Var(\frac{X_1 + X_2 + \cdots\cdot + X_{10}}{10})$

$= \frac{Var(X_1) + Var(X_2) + \cdots\cdot + Var(X_{10})}{10^2}$ (4 points)

$= \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$ (1 point)

5. (10%) 計算積分 $\int_{-\infty}^{\infty}(2x+1)e^{-x^2+6x}dx$. (可利用 $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$)

**Solution:**

1. (5pt) 對指數項配方
$$\int_{-\infty}^{\infty}(2x+1)e^{-(x-3)^2+9}\ dx = e^9\int_{-\infty}^{\infty}(2x+1)e^{-(x-3)^2}\ dx.$$
2. (2pt) 令新變數 $y=x-3$, 做變數變換 $x=y+3$, $dx=dy$, 積分範圍 $-\infty<x<\infty \ \Rightarrow\ -\infty<y<\infty$. 得到
$$\text{原式} = e^9\int_{-\infty}^{\infty}(2y+7)e^{-y^2}\ dy.$$
3. (1pt) 計算瑕積分極限存在
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} ye^{-y^2}\ dy &= \lim_{a\to\infty}\int_0^a ye^{-y^2}\ dy + \lim_{b\to-\infty}\int_b^0 ye^{-y^2}\ dy\\ &= \lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-y^2}\frac{1}{2}dy^2 + \lim_{b\to-\infty}\int_b^0 e^{-y^2}\frac{1}{2}dy^2\\ &= 0.\end{aligned}$$
或者考慮到對任意 $y$ 均有 $|ye^{-y^2/2}|\le 1$, 故
$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|ye^{-y^2}\right|\ dy \le \int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2/2}\ dy<\infty,$$
知瑕積分為絕對收斂, 因而 $ye^{-y^2}$ 為奇函數, 故 $\int_{-\infty}^{\infty}ye^{-y^2}\ dy=0.$
4. (2pt) 餘下代入已知的積分, 因此
$$\text{原式} = e^9\int_{-\infty}^{\infty}7e^{-y^2}\ dy = 7e^9\sqrt{\pi}.$$

6. (15%) 若 $f_X(t)=f_Y(t)=\begin{cases}te^{-t}, & t>0\\ 0, & t\le 0.\end{cases}$, 且隨機變數 $X$, $Y$ 獨立。
   (a) (8%) 令隨機變數 $Z=X+Y$，求 $Z$ 的機率密度函數 $f_Z(t)$。
   (b) (7%) 令隨機變數 $W=X^2$，求 $W$ 的機率密度函數 $f_W(t)$。

**Solution:**
For $t\le 0, f_Z(t)=0$. For $t>0$,
$$\begin{aligned}f_Z(t) &= \int_{\infty}^{\infty} f_X(v)f_Y(t-v)dv\\ &= \int_0^t ve^{-v}\cdot(t-v)e^{-(t-v)}dv\\ &= e^{-t}\int_0^t vt-v^2dv\\ &= e^{-t}\Big(\frac{1}{2}v^2t-\frac{1}{3}v^3\Big)\Big|_0^t\\ &= \frac{1}{6}t^3e^{-t}\end{aligned}$$

Note:

1. Make sure the formula for $f_Z(t)$ is written correctly.
2. Be careful of the range of integration, it is from 0 to $t$.
3. Don't leave out the case when $t\le 0$.

**Solution 6(b).**

$$\begin{aligned} F_W(t) &= P(W \le t) = P(X^2 \le t) \\ &= P(-\sqrt{t} \le X \le \sqrt{t}) \\ &= \int_{\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} f_X(s)ds \\ &= \int_0^{\sqrt{t}} se^{-s}ds, \quad t > 0 \\ \therefore, f_W(t) &= F_W'(t) \\ &= \frac{1}{2}e^{-\sqrt{t}}, t > 0 \end{aligned}$$

7. (15%) (5%+5%+5%) 令 $X$ 為隨機變數，其密度函數為 $f_X(t) = 3e^{-3t}$，求 (a) $P(1 \le X \le 2)$，(b) $\mathrm{E}(X)$ 和 (c) $\mathrm{Var}(X)$.

**Solution:**

(a) 按定義計算如下:

$$P(1 \le X \le 2) = \int_1^2 f_X(t)\,dt = \int_1^2 3e^{-3t}dt = -e^{-3t}\Big|_1^2 = e^{-3} - e^{-6}$$

評分標準:

1. 空白或僅抄寫題目得0分。
2. 搞錯被積分函數者扣3分。
3. 上下界搞錯扣1分。
4. 積分的過程如正負號或忘記除以3或多乘以3皆扣1分。

(b) 【方法一】由於$f_X(t) = 3e^{-3t}, t \ge 0$為指數分配（其$\lambda = 3$），因此$\mathrm{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{3}$。

【方法二】依期望值的定義以及分部積分法計算如下

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \int_0^\infty tf_X(t)\,dt = \int_0^\infty 3te^{-3t}dt = -\int_0^\infty t de^{-3t} \\ &= -\left[ te^{-3t}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-3t}dt \right] = \int_0^\infty e^{-3t}dt \\ &= -\frac{e^{-3t}}{3}\Bigg|_0^\infty = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

【方法三】依定義表達如下

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^\infty tf_X(t)\,dt = \int_0^\infty 3te^{-3t}dt$$

令$u = 3t$，則$\mathrm{E}(X)$使用$\Gamma$函數改寫可得

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{3}\int_0^\infty ue^{-u}du = \frac{1}{3} \cdot 1! = \frac{1}{3}$$

評分標準:

1. 空白或僅抄寫題目得0分。
2. 直接使用指數分配特性者得5分，但須註明清楚考生知道該分配為指數分配，誤寫為指數函數等不另外扣分。
2. 搞錯被積分函數者扣3分。
3. 上下界搞錯扣1分。
4. 積分的過程如正負號或忘記除以3或多乘以3皆扣1分。
5. 運用$\Gamma$函數者需正確使用代換。

(c) 【方法一】由於$f_X(t) = 3e^{-3t}, t \ge 0$為指數分配(其$\lambda = 3$),因此$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{9}$。

【方法二】依變異數的定義以及分部積分法計算如下

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) =& \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}^2(X) \\
=& \int_0^\infty 3t^2 e^{-3t} dt - \frac{1}{9} = -\int_0^\infty t^2 de^{-3t} - \frac{1}{9} \\
=& -\left[ t^2 e^{-3t}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty 2te^{-3t} dt \right] - \frac{1}{9} = 2\int_0^\infty te^{-3t}dt - \frac{1}{9} \\
=& \frac{2}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{9}
\end{aligned}
$$

【方法三】依定義表達如下

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) =& \int_0^\infty (t - \mathrm{E}(X))^2 f_X(t)\, dt \\
=& 3\int_0^\infty \left(t^2 - \frac{2t}{3} + \frac{1}{9}\right) e^{-3t} dt
\end{aligned}
$$

利用$\Gamma$函數可以將變異數改寫並計算如下

$$
\mathrm{Var}(X) = \left[\frac{1}{9}\cdot 2! - \frac{2}{9}\cdot 1! + \frac{1}{9}\cdot 0!\right] = \frac{1}{9}
$$

評分原則同(b)。

8. (15%) 若某無線通訊中心接收到呼叫次數是一個 Poisson 過程且平均每小時接收到 120 次呼叫。試求出以下機率:

   (a) (7%) 第 1 次接收到呼叫已經超過 3.5 分鐘的機率。

   (b) (8%) 在 3.5 分鐘之內所接收到的呼叫的次數比 3 次少的機率。

**Solution:**

(a) $\lambda = \frac{120}{60} = 2(\text{times/min})$, and $T = 3.5(\text{min})$, so $m = \lambda T = 7(\mathbf{3\%})$

$P(k) = \frac{m^k}{k!}e^{-m} = \frac{7^k}{k!}e^{-7}(\mathbf{2\%})$

$P(0) = e^{-7}(\mathbf{2\%})$ □

(b) $\lambda = \frac{120}{60} = 2(\text{times/min})$, and $T = 3.5(\text{min})$, so $m = \lambda T = 7(\mathbf{3\%})$

$P(k) = \frac{m^k}{k!}e^{-m} = \frac{7^k}{k!}e^{-7}(\mathbf{2\%})$

$P(0) + P(1) + P(2) = e^{-7} + 7e^{-7} + \frac{49}{2}e^{-7} = \frac{65}{2}e^{-7}(\mathbf{3\%})$ □