微乙小考三 (2016/10/27)

1. (7分) 令 $f(x)=x^x$，求 $f'(2)$.

sol: (方法一) 利用公式:

$$\left[f(x)^{g(x)}\right]'=g(x)\times f(x)^{g(x)-1}f'(x)+f(x)^{g(x)}\ln f(x)\times g'(x)$$

如此立即可得

$$f'(x)=(x^x)'=x\times x^{x-1}\times(x)'+x^x\ln x\times(x)'=x^x(1+\ln x)$$

代入$x=2$可得$f'(2)=2^2(1+\ln 2)=4(1+\ln 2)$。

(方法二) 利用指數與對數的恆等式：$a^b=e^{b\ln a}$，我們有

$$f(x)=x^x=e^{x\ln x}$$

因此運用連鎖律進行微分，我們可得

$$f'(x)=(x^x)'=\left(e^{x\ln x}\right)'=e^{x\ln x}\times(x\ln x)'=e^{x\ln x}(1+\ln x)$$

代入$x=2$可得$f'(2)=e^{2\ln 2}(1+\ln 2)=4(1+\ln 2)$。

2. (7分) 利用線性逼近估計 $\tan^{-1}(1.02)$ 的近似值。

sol: (分析：利用三角與反三角函數的特殊值，我們知道$\tan^{-1}(1)=\dfrac{\pi}{4}$，如此我們在$x=1$處作切線來線性逼近之。)

設$f(x)=\tan^{-1}x$，則$f(1)=\dfrac{\pi}{4}$，且有斜率

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}\quad ;\quad f'(1)=\frac{1}{2}$$

因此我們由點斜式可得$y-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{2}(x-1)$為$f$在$x=1$處的切線。

代入$x=1.02$可得$y=\dfrac{\pi}{4}+0.01$，此即$\tan^{-1}(1.02)$的近似值。

3. (6分) 給定一方程式：$\ln(x-2y)=\frac{x}{y}-2$，求 $\frac{dy}{dx}|_{(x,y)=(3e,e)}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}|_{(x,y)=(3e,e)}$.

sol: 利用隱函數微分可得

$$\frac{1-2y'}{x-2y}=\frac{y-xy'}{y^2}\tag{1}$$

如此代入$(x,y)=(3e,e)$可得

$$\frac{1-2\,y'|_{(x,y)=(3e,e)}}{3e-2e}=\frac{e-3e\,y'|_{(x,y)=(3e,e)}}{e^2}$$

兩邊同乘e後移項整理，可解得$y'|_{(x,y)=(3e,e)} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x,y)=(3e,e)} = 0$。

再對(1)進行一次隱函數微分，如此可得

$$\frac{-2y''(x-2y)-(1-2y')^2}{(x-2y)^2} = \frac{-xy''\times y^2-(y-xy')\times 2yy'}{y^4}$$

接著代入$(x,y)=(3e,e)$、$y'|_{(x,y)=(3e,e)}=0$，如此得

$$\frac{-2e\; y''|_{(x,y)=(3e,e)}-1}{e^2} = \frac{-3e\; y''|_{(x,y)=(3e,e)}\times e^2}{e^4}$$

如此做些整理可解得$y''|_{(x,y)=(3e,e)} = \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{(x,y)=(3e,e)} = \frac{1}{e}$。

(Another method) 我們可以先對(1)作交叉相乘可得

$$y^2-2y^2y' = xy - x^2y' - 2y^2 + 2xyy'$$

亦即

$$3y^2 - xy + \left(x^2-2y^2-2xy\right)y' = 0$$

對此式進行隱函數微分可得

$$6yy' - (y+xy') + (2x-4yy'-2y-2xy')\,y' + \left(x^2-2y^2-2xy\right)y'' = 0$$

如此代入$(x,y)=(3e,e)$、$y'|_{(x,y)=(3e,e)}=0$，於是可得

$$-e + \left(9e^2-2e^2-6e^2\right)\,y''|_{(x,y)=(3e,e)} = 0$$

因此解得$y''|_{(x,y)=(3e,e)} = \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{(x,y)=(3e,e)} = \frac{1}{e}$。