1051微乙01-05班期中考解答和評分標準

1. 令函數 $f(x) = x\sqrt{x^2+3}$.

    (a) (5%) 說明 $f(x)$ 是一對一函數。

    (b) (5%) 令 $g(x)$ 是 $f(x)$ 之反函數，求 $g'(-2)$。

Solution:

(a)

$$f(x) = x\sqrt{x+3}$$

$$f^{'}(x) = \sqrt{x+3} + \frac{x^2}{\sqrt{x+3}} > 0, \forall x \in \mathbf{R}$$

$$\Rightarrow f(x)\text{嚴格遞增，所以}f(x)\text{是一對一函數。}$$

評分標準:

1. 微分$= 1\% + 2\%$
2. 「$f^{'}(x) > 0$，所以$f(x)$為嚴格遞增函數」$= 1\%$
3. 「$f(x)$嚴格遞增，所以$f(x)$是一對一」$= 1\%$
4. 微分錯誤，無法達到「$f^{'} > 0 \Rightarrow f$嚴格遞增$\Rightarrow$一對一」的結論，所以錯誤以後不給分。

(b)

$$g(f(x)) = x$$

$$g^{'}(f(x)) \cdot f^{'}(x) = 1$$

$$g^{'}(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \quad (2\%)$$

$$\text{當}x = -1, f(-1) = -2\text{，所以 } g(-2) = -1 \quad (1\% + 1\%)$$

$$\therefore g^{'}(-2) = g^{'}(f(-1)) = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{2}{5} \quad (1\%)$$

2. (a) (6%) 設 a, b 為實數。若 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{ax+b}-2}{x}=2$，則 $a, b=?$

(b) (6%) 求 $\lim_{n\to\infty}(\dfrac{n+2}{n-2})^{2n}$.

Solution:

(a) [Method 1]

因為$\lim_{x\to 0} x=0$、$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{ax+b}-2}{x}=2$，所以

$$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{ax+b}-2\right)=\lim_{x\to 0} x\cdot\frac{\sqrt{ax+b}-2}{x}=0\cdot 2=0$$

從而$\sqrt{b}-2=0$，即$b=4$。 另一方面，透過有理化可得

$$2=\lim_{x\to 0}\frac{ax}{x\left(\sqrt{ax+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{a}{\sqrt{ax+4}+2}=\frac{a}{4}$$

因此$a=8$。

[Method 2]

若我們考慮函數$f(x)=\sqrt{ax+b}$，並且要求$f(0)=2$，則原極限式為$f'(0)=2$。首先由$f(0)=2$，可以得到$\sqrt{b}=2$，即$b=4$。

另一方面，我們由$f'(x)=\dfrac{a}{2\sqrt{ax+4}}$，可知$f'(0)=\dfrac{a}{4}=2$，從而$a=8$。

評分標準:

(a) 空白或僅抄寫題目得0分。
(b) 使用有理化可得2分
(c) 計算出b值可得1至2分 (取決於如何說明b為4)
(d) 計算出a值可以得到剩下的分數。 (中間若有計算錯誤則得部分分數)
(e) 使用方法二而得到正確答案者可以得到全部的分數，否則最多得三分。
(f) 如果發現$a=2\sqrt{b}+4$得2至3分 (取決於方法離得到其中一個值還需要的可能步驟數)
(g) 些許計算錯誤僅扣1至2分

(b) 無論那個方法都必然用到:

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$$

若沒用到此式則0分至2分，有用到則至少3，接著再依計算錯誤之程度給0至3分。

[Method 1] 直接整理計算有:

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n-2}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{n-2}\right)^{\frac{n-2}{4}}\right]^{8}\left(1+\frac{4}{n-2}\right)^{4}=e^{8}$$

[Method 2] 首先可以看出

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n-2}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n-2}\right)^{2n}$$

因此令$h=\dfrac{4}{n-2}$，則$n=2+\dfrac{4}{h}$，因此

$$\text{原式}=\lim_{h\to 0^{+}}(1+h)^{4+\frac{8}{h}}=\lim_{h\to 0}\left[(1+h)^{\frac{1}{h}}\right]^{8}(1+h)^{4}=e^{8}$$

[Method 3]

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n-2}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1-\frac{2}{n}}\right)^{2n}=\frac{\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^{4}}{\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{2}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}\right]^{-4}}=\frac{e^{4}}{e^{-4}}=e^{8}$$

3. (a) (5%) 令 $y = \cot(\cos^2(3x))$，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

(b) (5%) 令 $y = x^{\ln x}$, $x > 0$，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

(c) (5%) 求 $\sin 3x$ 的第 52 階導函數。

Solution:

(a)

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -\csc^2\left(\cos^2(3x)\right)\cdot\left(\cos^2(3x)\right)' \quad (2\%) \\ &= -\csc^2\left(\cos^2(3x)\right)\cdot 2\cos(3x)\cdot(-\sin(3x))\cdot 3 \quad (3\%) \\ &= 6\sin(3x)\cos(3x)\csc^2\left(\cos^2(3x)\right) \\ (\text{or } &= 3\sin(6x)\csc^2\left(\cos^2(3x)\right)) \end{aligned}$$

(b) (1) Since $y = x^{\ln x} = e^{(\ln x)^2}$ (1%), we have

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= e^{(\ln x)^2}\cdot\left((\ln x)^2\right)' \quad (2\%) \\ &= e^{(\ln x)^2}\cdot 2(\ln x)\cdot\frac{1}{x} \quad (2\%) \\ &= 2\ln x\cdot x^{\ln x - 1} \end{aligned}$$

(2) Since $\ln y = \ln\left(x^{\ln x}\right) = (\ln x)^2$ (1%), we have

$$\frac{y'}{y} \quad (2\%) = 2\ln x\cdot\frac{1}{x} \quad (2\%)$$

Therefore,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y' = y\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x} = 2\ln x\cdot x^{\ln x - 1}$$

(3)

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \ln x\cdot x^{\ln x - 1} \quad (2\%) + \ln x\cdot x^{\ln x}\cdot(\ln x)' \quad (3\%) \\ &= 2\ln x\cdot x^{\ln x - 1} \end{aligned}$$

(c) $f'(x) = \cos(3x)\cdot 3$
$f''(x) = -\sin(3x)\cdot 3^2$
$f'''(x) = -\cos(3x)\cdot 3^3$
$f^{(4)}(x) = \sin(3x)\cdot 3^4$ (2%)
$\vdots$
By induction, we have

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \cos(3x)\cdot 3^n & \text{if } n = 4k+1, k\in\mathbb{N} \\ -\sin(3x)\cdot 3^n & \text{if } n = 4k+2, k\in\mathbb{N} \\ -\cos(3x)\cdot 3^n & \text{if } n = 4k+3, k\in\mathbb{N} \\ \sin(3x)\cdot 3^n & \text{if } n = 4k, k\in\mathbb{N} \end{cases}$$

And therefore, $f^{(52)}(x) = 3^{52}(1\%)\sin(3x)(2\%)$.

4. (10%) 試證明 $|\tan a - \tan b| \geq |a - b|$, 其中 $a, b \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $a \neq b$.

Solution:

令$f(x) = \tan x$，並且不失一般性，我們可以假設$a < b$。由於f在$[a, b]$上連續且(a, b)上可微分，則根據均值定理(Mean Value Theorem, MVT)可知存在$\xi \in (a, b)$，使得

$$f'(\xi) = \frac{\tan a - \tan b}{a - b}$$

而$f'(x) = \sec^2 x$，且由於$-1 \leq \cos x \leq 1$，因此$\sec^2 x \geq 1$，故$f'(\xi) \geq 1$。 如此我們知道

$$\frac{\tan a - \tan b}{a - b} \geq 1$$

即

$$\tan a - \tan b \geq a - b$$

類似地我們可以處理$a > b$的情形，如此證明完畢。

評分標準:

1. 空白或無關作答之文字，0分。
2. 知道要使用均值定理可得2分（含指出條件或正確使用），但僅說明要使用均值定理則得1分。
3. 計算$f'(x) = \sec^2 x$之結果正確可得2分。
4. 正確認識$sec^2 x$之範圍可得2分，若前一步結果錯誤但仍有試圖考量範圍可得1分或2分。
5. 有考慮到a, b之間的大小關係，或使用均值定理時說明出ξ介於a, b之間等敘述可得2分。
6. 其他必要說明之文字以組織證明過程2分。（如說明「設函數$f(x) = \tan x$」、「使用均值定理」等語。）

5. (10%) 試利用線性逼近估計 $e^{\sin^{-1}(-0.0002)}$之值。

Solution:

$$f(x) = e^{\sin^{-1}x} \quad (2\%)$$
$$f^{'}(x) = e^{\sin^{-1}x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (2\%)$$

線性逼近: $f(x) \approx f(a) + f^{'}(a)(x-a) \quad (2\%)$

取$x = -0.0002, a = 0 \quad (1\% + 1\%)$

$$\therefore e^{\sin^{-1}(-0.0002)} \approx e^{\sin^{-1}0} + e^{\sin^{-1}0} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-0^2}} \cdot (-0.0002 - 0) \quad (1\%)$$
$$= 0.9998 \quad (1\%)$$

評分標準:

1. $f(x) = e^{\sin^{-1}x}$若微分錯誤，最高只能得六分;
2. 若只估計了$e^{\sin^{-1}(-0.0002)} \approx e^{-0.0002}$，最高只能得五分。

6. (10%) 求曲線 $x\cos^2 y = \sin y$ 在 $(0,\pi)$ 的切線方程式。

Solution:

(1) $\cos^2 y + x\cdot 2\cos y\cdot(-\sin y)\cdot y' = \cos y\cdot y'$ (5%)

Therefore, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\cos^2 y}{\cos y + 2x\cos y\sin y}$.

$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(x,y)=(0,\pi)} = \dfrac{\cos^2\pi}{\cos\pi + 2\cdot 0\cdot\cos\pi\sin\pi} = -1$ (3%)

So the tangent line is $y-\pi = -1(x-0)$, i.e., $x+y=\pi$ (2%).

(2) Since $x = \dfrac{\sin y}{\cos^2 y}$, points on the curve can be parametrized as $\left(\dfrac{\sin t}{\cos^2 t}, t\right)$.

Therefore, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \dfrac{1}{\frac{\cos t\cos^2 t - \sin t(2\cos t(-\sin t))}{\cos^4 t}} = \dfrac{\cos^3 t}{\cos^2 t + 2\sin^2 t}$ (5%)

$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(x,y)=(0,\pi)} = \left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\pi} = \dfrac{\cos^3\pi}{\cos^2\pi + 2\sin^2\pi} = -1$ (3%)

So the tangent line is $y-\pi = -1(x-0)$, i.e., $x+y=\pi$ (2%).

(3) Since $x = \dfrac{\sin y}{\cos^2 y}$, the inverse function is given by $g(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$, and the slope at $(x,y) = (0,\pi)$ is equal to $\dfrac{1}{g'(\pi)}$.

$g'(x) = \dfrac{\cos x\cos^2 x - \sin x\,(2\cos x(-\sin x))}{\cos^4 x} = \dfrac{\cos^2 x + 2\sin^2 x}{\cos^3 x}$ (5%)

Therefore, $\dfrac{1}{g'(\pi)} = -1$ (3%).

And the tangent line is $y-\pi = -1(x-0)$, i.e., $x+y=\pi$ (2%).

7. (23%) 若 $y=f(x)=\dfrac{(x+1)^3}{x^2+2x}$

(a) $y=f(x)$ 在 $\underline{(-\infty,-1-\sqrt{3})\cup(-1+\sqrt{3},\infty)}$ (區間)遞增 (3%)

$y=f(x)$ 在 $\underline{(-1-\sqrt{3},-2)\cup(-2,0)\cup(0,-1+\sqrt{3})}$ (區間)遞減 (3%)

(b) $y=f(x)$ 在 $\underline{(-2,-1)\cup(0,\infty)}$ (區間)凹向上 (3%)

$y=f(x)$ 在 $\underline{(-\infty,-2)\cup(-1,0)}$ (區間)凹向下 (3%)

(c) $y=f(x)$ 之極大值(若存在的話): $\underline{-\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ (-1-\sqrt{3},-\dfrac{3\sqrt{3}}{2})}$ (座標) (2%)

$y=f(x)$ 之極小值(若存在的話): $\underline{\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ (-1+\sqrt{3},+\dfrac{3\sqrt{3}}{2})}$ (座標) (2%)

(d) $y=f(x)$ 之所有漸近線為 $\underline{y=x+1,\ x=-2,\ x=0}$ (4%)

(e) 畫出 $y=f(x)$ 之圖形 (3%)

Solution:

(a) 化簡

$$\frac{(x+1)^3}{x^2+2x}=\frac{(x+1)^3}{(x+1)^2-1}=\frac{[(x+1)^2-1](x+1)+(x+1)}{(x+1)^2-1}$$
$$=x+1+\frac{x+1}{(x+1)^2-1}$$

微分得

$$f'(x)=1+\frac{[(x+1)^2-1]-(x+1)\cdot 2(x+1)}{[(x+1)^2-1]^2}=1+\frac{-1-(x+1)^2}{[(x+1)^2-1]^2}$$
$$=\frac{(x+1)^4-2(x+1)^2+1-1-(x+1)^2}{[(x+1)^2-1]^2}$$
$$=\frac{(x+1)^2[(x+1)^2-3]}{[(x+1)^2-1]^2}=\frac{(x+1)^2(x^2+2x-2)}{x^2(x+2)^2}\text{ 或 }\frac{x^4+4x^3+3x^2-2x-2}{x^2(x+2)^2}.$$

可知當分母為 0, 即 $x=-2,\ 0$ 時不存在, 且

$$\begin{array}{ll} f'(x)=0\Rightarrow & x=-1,\ -1\pm\sqrt{3} \\ \hline f'(x)>0\Rightarrow & (x+1)^2-3>0 \\ \Rightarrow & x>-1+\sqrt{3}\text{ 或 }x<-1-\sqrt{3} \\ \hline f'(x)<0\Rightarrow & (x+1)^2-3<0\text{ 且 }x\neq-2,\ 0 \\ \Rightarrow & -1-\sqrt{3}<x<-2,\ -2<x<0\text{ 或 }0<x<-1+\sqrt{3}. \end{array}$$

因此得 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1-\sqrt{3})\cup(-1+\sqrt{3},\infty)$ 上遞增 (注意到 $f'(x)$ 在 $x=-1$ 前後並沒有變號), 在 $(-1-\sqrt{3},-2)\cup(-2,0)\cup(0,-1+\sqrt{3})$ 上遞減.

註: 若將端點考慮進去, $f(x)$ 在 $(-\infty,-1-\sqrt{3}]\cup[-1+\sqrt{3},\infty)$ 上遞增, 在 $[-1-\sqrt{3},-2)\cup(-2,0)\cup(0,-1+\sqrt{3}]$ 上遞減.

評分方式:
[1] 微分正確, 完成解根或者因式分解, 但錯誤判斷遞增、遞減區間, 至少給到 3%.
[2] 微分計算部分錯誤, 情節輕微不影響答案正確者, 扣 1%.
[3] 微分計算顯然錯誤, 依錯誤之微分做出正確判斷者, 各給予 1%.
[4] 遞減區間若未排除 -2 跟 0, 或寫 $(-1-\sqrt{3},-1+\sqrt{3}), x\neq-2,0$, 扣 1%.
[5] 區間以擴張至最大為原則. 區間之端點除了 $-2,0$ 不可計入外, 其他均不算錯.
[6] 微分算對, 誤以為在 $x=-1$ 變號, 給到 4%.

(b) 由前一小題, 再將分式化簡

$$f'(x)=1+\frac{-1-(x+1)^2}{[(x+1)^2-1]^2}=1+\frac{-[(x+1)^2-1]-2}{[(x+1)^2-1]^2}$$
$$=1-\frac{1}{(x+1)^2-1}-\frac{2}{[(x+1)^2-1]^2}$$

計算二次微分, 得

$$\begin{aligned}
f''(x) &= -\frac{(-1)\cdot 2\cdot(x+1)}{[(x+1)^2-1]^2} - \frac{(-2)\cdot 2\cdot 2(x+1)}{[(x+1)^2-1]^3} \\
&= \frac{2(x+1)}{[(x+1)^2-1]^2} + \frac{8(x+1)}{[(x+1)^2-1]^3} \\
&= (x+1)\frac{2[(x+1)^2-1]+8}{[(x+1)^2-1]^3} = \frac{(x+1)[2(x+1)^2+6]}{[(x+1)^2-1]^3} \\
&= \frac{2(x+1)[(x+1)^2+3]}{x^3(x+2)^3} \text{ 或 } \frac{2(x+1)[x^2+2x+4]}{x^3(x+2)^3} \\
&\text{或 } \frac{2(x+2)(x+1)x[(x+1)^2+3]}{x^4(x+2)^4} \\
&\text{或 } \frac{2x^3+6x^2+12x+8}{x^4(x+2)^4}.
\end{aligned}$$

同樣知在 $x=-2,0$ 時不存在, 其在各區間之正負號如下表

x		-2		-1		0	
f''	$-$	Δ	$+$	0	$-$	Δ	$+$

Δ : 不存在.

可知凹向上區間為 $(-2,-1)\cup(0,\infty)$, 而凹口向下的區間為 $(-\infty,-2)\cup(-1,0)$.

若想考慮端點, 則分別為凹向上 $(-2,-1]\cup(0,\infty)$, 凹向下 $(-\infty,-2)\cup[-1,0)$.

評分方式:

[1] 微分計算正確, 完成解根或者因式分解, 但錯誤判斷區間, 至少給到 3%.
[2] 微分計算部分錯誤, 情節輕微不影響答案正確者, 扣 1%.
[3] 微分計算顯然錯誤, 依錯誤之微分但做出正確判斷者, 各給予 1%.
[4] 凹向上、凹向下區間若未排除 -2 跟 0, 各扣 1%.
[5] 區間是否包括端點, 除了 $-2,0$ 不可計入外, 其他均不算錯.

(c) 依前述一次微分之結果, 可能發生極值之臨界點 (critical point) 或者微分不存在的點為 $-1,-1\pm\sqrt{3},-2,0$. 但 $-2,0$ 之函數值不存在, 因此只考慮 $-1,-1\pm\sqrt{3}$ 三點.

利用前述的二次微分結果, 根據二次微分檢定,

$$\begin{aligned}
f''(-1-\sqrt{3})<0 &\Rightarrow\ f(-1-\sqrt{3}) = \frac{-\sqrt{27}}{3-1} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ 為 (局部) 極大值.} \\
f''(-1)=0 &\Rightarrow\ \text{由凹向改變可知} f(-1) \text{ 並非極值.} \\
f''(-1+\sqrt{3})>0 &\Rightarrow\ f(-1+\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ 為 (局部) 極小值.}
\end{aligned}$$

(註: 利用 $x=-1\pm\sqrt{3}\ \Rightarrow\ x+1=\pm\sqrt{3}$ 代入.)

故可知 $(-1-\sqrt{3},-\frac{3\sqrt{3}}{2})$ 為極大點, $(-1+\sqrt{3},\frac{3\sqrt{3}}{2})$ 為極小點.

評分方式:

[1] 四個數字各給 1%.
[2] 極大極小判斷錯誤, 由於給分範圍極小, 只能視各種情況扣 1% ~ 2% .
[3] 沒有理由, 只寫答案, 不予給分.

(d) 依函數式可知當 $x\to\pm\infty$ 時, 有

$$|f(x)-(x+1)| = \left|\frac{x+1}{(x+1)^2-1}\right| \to 0.$$

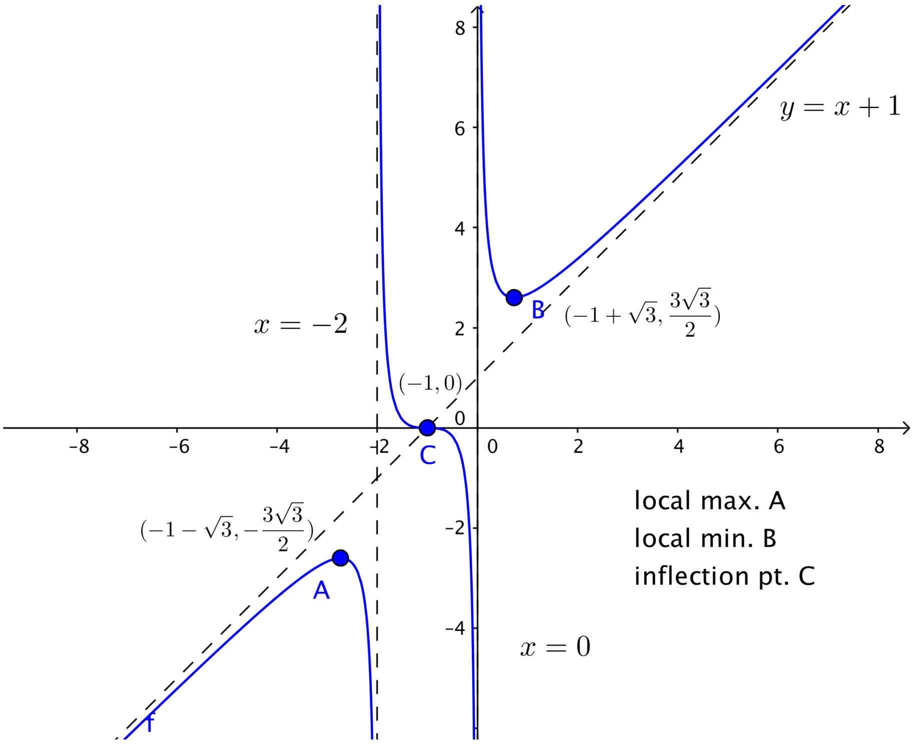
因此 $y=x+1$ 為一斜漸近線 (當 $x\to\pm\infty$).

另外由於分式之分母在 $x=-2,\ 0$ 時為 0, 因此在 $x\to-2,\ 0$ 時會趨近正/負無窮大, 故 $x=-2,\ x=0$ 為兩條鉛直漸近線.

評分方式:

[1] 斜漸近線 $y=x+1$, 2%.
[2] $x=0,\ x=-2$, 各 1%.
[3] 沒有理由, 只寫答案, 不予給分.

(e)



評分方式:

[1] 依相似程度給分.

[2] 前面沒提到的, 反曲點剛好也是 x 軸交點 $(-1, 0)$: 沒標出來, 扣 1%.

8. (10%) 已知一卡車在固定時速 x 公里下($60 \le x \le 120$)的油耗是 $500/x$ (公里/公升)，汽油每公升 20 元且卡車司機的時薪是 400 元。從台北到高雄 400 公里，請問在油錢和司機的薪水之總和最少的情況下，卡車的時速須維持多少？ (時速必需介與 60 和 120 之間)

Solution:

Let $f(x) = 20 \cdot \dfrac{\frac{400}{500}}{x} + 400 \cdot \dfrac{400}{x} = 16x + \dfrac{160000}{x}$ (4pts)

then $f'(x) = 16 - \dfrac{160000}{x^2}$ (4pts)

set $f'(x) = 0$

then $16 - \dfrac{160000}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 100$ (2pts)

answer is 100km/hr