1051微乙01-05班期末考解答和評分標準

1. (10%) 令 $f(x)=\int_{\sqrt{x}}^{\tan^{-1}x}\frac{1}{t^6+1}dt$。求 $f'(x)$。

Solution:

設$F(x)=\int_0^x\frac{1}{t^6+1}dt$、$g(x)=\tan^{-1}x$、$h(x)=\sqrt{x}$，如此有$f(x)=F(g(x))-F(h(x))$。而且可以知道$F'(x)=\frac{1}{x^6+1}$、$g'(x)=\frac{1}{x^2+1}$、$h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$。因此所求可以利用微積分基本定理與連鎖律計算如下:

$$
\begin{aligned}
f'(x)=&\frac{d}{dx}\left(F(g(x))-F(h(x))\right)\\
=&F(g(x))g'(x)-F(h(x))h'(x)\\
=&\frac{1}{\left(\tan^{-1}x\right)^6+1}\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{\left(\sqrt{x}\right)^6+1}\frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}
$$

評分原則:

(a) 寫出答案者給滿分並且知道這就是答案者給滿分，亦即寫出答案但誤以為那不是答案者將酌予扣分。

(b) 注意，可以直接寫出答案而不需要任何其他計算過程，分數相減不必通分化簡，如若化簡錯誤將被酌予扣分。

(c) 知道要使用微積分基本定理並列出相關函數者得三分，但背錯公式者得零分。

(d) 沒有完整使用連鎖律者被扣四分（亦即兩項各兩分），如記得使用但使用錯誤者扣一分。

例如:

(i) 答案形式為$\frac{1}{\left(\tan^{-1}x\right)^6+1}-\frac{1}{1+x^3}$者扣四分。

(ii) 答案形式為$\frac{1}{\left(\tan^{-1}x\right)^6+1}\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^3}$者扣兩分

(iii) 答案形式為$\frac{1}{\left(\tan^{-1}x\right)^6+1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{1+x^3}\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 者扣一分。

(iv) 答案形式為$\frac{1}{\left(\tan^{-1}x\right)^6+1}\left(\tan^{-1}x\right)'-\frac{1}{1+x^3}\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 者扣一分。

(e) 計算錯誤者、平白無故$+C$者扣一分；若錯誤太多則扣兩分

(f) $\tan^{-1}x$不可寫為$\tan^{-6}x$，本次測驗並未對此扣分。

(g) 空白、畫圖、無法辨識文字或答案者得零分。

[Method 2]首先可以將被積分函數做如下處理:

$$\frac{1}{1+t^6}=\frac{A}{1+t^2}+\frac{Bt^2+C}{t^4-t^2+1}$$

其中A, B, C為待定係數。通分後有

$$1=A\left(t^4-t^2+1\right)+\left(Bt^2+C\right)\left(1+t^2\right)=(A+B)t^4+(B+C-A)+(A+C)$$

如此可解得$A=\frac{1}{3}$、$B=-\frac{1}{3}$、$C=\frac{2}{3}$。因此

$$
\begin{aligned}
f(x)=&\frac{1}{3}\int_{\sqrt{x}}^{\tan^{-1}x}\left(\frac{1}{1+t^2}-\frac{t-2}{t^4-t^2+1}\right)dt\\
=&\frac{1}{3}\tan^{-1}t\Big|_{\sqrt{x}}^{\tan^{-1}x}-\frac{1}{3}\int_{\sqrt{x}}^{\tan^{-1}x}\frac{t}{\left(t^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dt+\frac{2}{3}\int_{\sqrt{x}}^{\tan^{-1}x}\frac{1}{t^4-t^2+1}dt\\
=&\frac{\tan^{-1}\left(\tan^{-1}x\right)-\tan^{-1}\sqrt{x}}{3}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2t^2-1}{\sqrt{3}}\Bigg|_{\sqrt{x}}^{\tan^{-1}x}+\frac{2}{3}\int_{\sqrt{x}}^{\tan^{-1}x}\frac{dt}{t^4-t^2+1}
\end{aligned}
$$

評分原則:

(a) 若有計算出係數者可得三分。

(b) 若有算出如上形式並代入上下界者得五分。

(c) 本題的第三個積分項無法用一般的方法求出反導函數，因此採用此法者至多得五分。

Note: 可以容易知道第二個方法計算的繁雜、不一定真的能算出積分，因此不宜採取此法。

2. (20%) 考慮函數 $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

(a) (12%) 求 $f(x)$ 對 $x = 0$ 的泰勒展開式。(需寫出一般式)

(b) (8%) 以 (a) 中非零的前三項估計積分 $\int_{-2}^{2} f(x)dx$，誤差忽略不計。

Solution:

(a) [Method 1] 我們已知e^x的泰勒展開式如下

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots$$

我們取$x := -\dfrac{x^2}{2}$代入可得

$$\begin{aligned} e^{-\frac{x^2}{2}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^k k!} \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{48} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n!} + \cdots \end{aligned}$$

評分標準:

(i) 完整作答者可得滿分。

(ii) 可以直接寫下答案，惟結果有錯將被至少扣六分以上。

(iii) 未寫出一般項者扣三分。

(iv) 無緣無故在上述做法中的答案忽然$+C$者扣三分。

(v) 在$\sum$中的標號如n或k或i等與被加項的標號不同者扣一分。如回答$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^k k!}$者。

(vi) 在$\sum$中的編號表明加總為有限項者，或使用「$\cdots$」卻在某項停止者扣一分。

(vii) 忘記使用「階層符號!」者扣一至三分。（視忘記的情形處理。）

(viii) 忘記分母的2需次方處理者扣一至三分。（視忘記的情形處理。）

(ix) 直接將e^x的展開式的結果記錯但並非前列項目的情形則至少扣八分。（視忘記的情形處理。）

(x) 其他繕寫錯誤，如忘記常數項1或跳過某一項次方等錯誤扣一至三分不等，視情形而定。

(xi) 空白、塗鴉或無法辨識答案或與題意無關的作答得零分。

[Method 2] 同樣已知$e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$。由於$f'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$，因此

$$f'(x) = -x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k+1}}{2^k k!}$$

（注意到中間的過程其實已經回答了題目所求的泰勒展開式！除非作答者有發現這件事，否則不予給分。）因此取積分後可得

$$f(x) = C + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k+2}}{2^k k!(2k+2)}$$

之後利用$C = f(0) = 1$可得

$$f(x) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k+2}}{2^k k!(2k+2)}$$

評分標準:

(i) 完整作答者可得滿分。

(ii) 計算微分時錯誤扣五分，據此而產生的計算錯誤不另外扣分，我們會視積分過程的步驟正確性另外扣分。

(ii) 忘記積分常數扣三分。

(iii) 積分常數C解錯者扣兩分。

(iv) 其餘標準同方法一。

[Method 3] 求下列各階導數

$$\begin{aligned} f'(x) &= -xe^{-\frac{x^2}{2}} \\ f''(x) &= -e^{-\frac{x^2}{2}} + x^2e^{-\frac{x^2}{2}} \\ f'''(x) &= 3xe^{-\frac{x^2}{2}} - x^3e^{-\frac{x^2}{2}} \\ f^{(4)}(x) &= 3e^{-\frac{x^2}{2}} - 6x^2e^{-\frac{x^2}{2}} + x^4e^{-\frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)x^k}{2^k k!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2^n n!}x^{2n} + \cdots \end{aligned}$$

評分標準:

(i) 完整作答者可得滿分，允許計算好幾項之後直接寫出表達式而不必說明表達式的來源。

(ii) 計算完整且幾乎找出規律但細節有些錯誤者扣一至五分。

(iii) 計算完整但未能找出規律者／一般項者扣六至八分。

(iv) 計算出一階導數者得一分。

(v) 空白、塗鴉或無關題旨者得零分。

(b) 利用(a)的結果，我們有

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx \simeq \int_{-2}^{2} \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8}\right) dx = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{40}\bigg|_{-2}^{2} = \frac{44}{15}$$

評分標準:

(i) 完整作答者可得滿分，允許答案未通分，且允許以下列形式回答

$$\left(2 - \frac{8}{6} + \frac{32}{40}\right) - \left(-2 + \frac{8}{6} - \frac{32}{40}\right)$$

(ii) 計算錯誤（如寫錯正負號／四則運算錯誤／多一項）者扣一分。

(iii) 以級數的形式回答積分但未取出前三項者扣一分。

(iv) 遺漏常數項而計算二次、四次與六次項的積分者扣三分。

(v) 由於(a)而導致的錯誤至少扣三分（含上述情形）。

(vi) 忘記替被積分函數積分而逕自代入上下界者扣四分。

(vii) 未完成計算者扣至少兩分。

(viii) 計算完定積分後$+C$者扣一分。

(ix) 試圖求反導函數直接計算者得零分。

(x) 空白、塗鴉或無關題旨者得零分。

3. (20%)

(a) (8%) 找出 $a, b, c \in \mathbb{R}$ 使得對所有的 u, $\dfrac{u-3}{(u-1)(u^2+1)} = \dfrac{a}{u-1} + \dfrac{bu+c}{u^2+1}$ 皆成立.

(b) (12%) 求 $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{2x}-3e^x}{(e^x-1)(e^{2x}+1)}dx$

Solution:

(a) $u-3 = a(u^2+1) + (bu+c)(u-1)$ (2pts)
Compare coefficients of u (3pts)
$$\begin{cases} a-c=-3 \\ c-b=1 \\ a+b=0 \end{cases}$$
We have $a=-1,\ b=1,\ c=2$ (3pts)

(b) Let $u=e^x$, $du=e^x dx$

$$\begin{aligned}
\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{2x}-3e^x}{(e^x-1)(e^{2x}+1)}dx \quad &\overset{(3pts)}{=\!=} \quad \int_2^3 \frac{u-3}{(u-1)(u^2+1)}du \\
&\overset{(3pts)}{=\!=} \quad \int_2^3 \frac{-1}{u-1}du + \int_2^3 \frac{u+2}{u^2+1}du \\
&\overset{(4pts)}{=\!=} \quad -\ln(u-1)\Big|_2^3 + \frac{1}{2}\ln(u^2+1)\Big|_2^3 + 2\tan^{-1}u\Big|_2^3 \\
&\overset{(2pts)}{=\!=} \quad -\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 10 - \frac{1}{2}\ln 5 + 2\tan^{-1}3 - 2\tan^{-1}2 \\
&= \quad -\frac{1}{2}\ln 2 + 2\tan^{-1}3 - 2\tan^{-1}2
\end{aligned}$$

4. (10%) 計算 $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx.$

Solution:

$$\begin{aligned} &x = \sin\theta,\ dx = \cos\theta d\theta && \text{(2 points)} \\ &x = 0,\ \theta = 0 \\ &x = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \theta = \frac{\pi}{4} && \text{(2 points)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2\theta}{\cos^3\theta}\cos\theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2\theta d\theta && \text{(2 points)} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2\theta - 1) d\theta && \text{(2 points)} \\ &= (\tan\theta - \theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= 1 - \frac{\pi}{4} && \text{(2 points)} \end{aligned}$$

5. (10%) 計算 $\int_1^e (\ln x)^2 dx$.

Solution:

solution 1

$$\begin{aligned}\int_1^e (\ln x)^2 \mathrm{d}x &= x(\ln x)^2\Big|_1^e \textbf{(2\%)} - \int_1^e x\cdot 2(\ln x)\frac{1}{x}\mathrm{d}x\textbf{(4\%)}\\ &= e-2\int_1^e \ln x\mathrm{d}x\\ &= e-2\left[x\ln x|_1^e - \int_1^e x\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x\right]\textbf{(3\%)}\\ &= e-2[e-(e-1)]\\ &= e-2\textbf{(1\%)}\end{aligned}$$

solution 2

Let $x = e^y$, then $dx = e^y dy$**(2%)**, then

$$\begin{aligned}\int_0^1 y^2 e^y \mathrm{d}y &= \int_0^1 y^2 \mathrm{d}e^y\\ &= y^2e^y\Big|_0^1 \textbf{(2\%)} - \int_0^1 e^y\cdot 2y\mathrm{d}y\textbf{(2\%)}\\ &= e-2\int_0^1 ye^y\mathrm{d}y\\ &= e-2\int_0^1 y\mathrm{d}e^y\\ &= e-2\left[ye^y|_0^1 - \int_0^1 e^y\mathrm{d}y\right]\\ &= e-2\left[e-\ e^y|_0^1\right]\textbf{(3\%)}\\ &= e-2\textbf{(1\%)}\end{aligned}$$

6. (10%) 計算 $\lim_{x\to 0^+}(1+\sin 4x)^{\cot x}$。

Solution:

檢查當 $x \to 0^+$ 時, $1+\sin 4x \to 1$, $\cot x \to \infty$, 此時原極限為不定型 1^∞, 無法直接判定極限值.
因此考慮將底數轉換成指數:

$$(1+\sin 4x)^{\cot x} = \exp\left[\cot x \ln(1+\sin 4x)\right] = \exp\left[\frac{\cos x}{\sin x}\ln(1+\sin 4x)\right].$$

觀察指數

$$\frac{\ln(1+\sin 4x)}{\sin x} = \frac{\ln(1+\sin 4x)}{\sin 4x}\cdot\frac{\sin 4x}{4x}\cdot\frac{4x}{\sin x} \tag{$\star$}$$

可分別求得極限. 根據微分的定義

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln 1+h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln 1+h-\ln 1}{h-0} = \frac{d}{dh}\big(\ln 1+h\big)\Big|_{h=0} = \frac{1}{1+h}\Big|_{h=0} = 1.$$

另外已知 $\dfrac{\sin\theta}{\theta} \to 1$ 當 $\theta \to 0$.
因此, 當 $x \to 0^+$ 時有

$$(\star) = \frac{\ln(1+\sin 4x)}{\sin 4x}\cdot\frac{\sin 4x}{4x}\cdot\frac{4x}{\sin x} \;\to\; 1\cdot 1\cdot 4 = 4.$$

根據連續性跟極限的性質

$$\lim_{x\to 0^+}(1+\sin 4x)^{\cot x} = \exp\left(\lim_{x\to 0^+}\cos x\ln(1+\sin 4x)/\sin x\right) = e^4.$$

評分方式:
指數上的極限是 $0/0$ 不定型, 除了用導數定義之外, 還可以用羅必達法則或者泰勒展開式, 遇到計算錯誤, 依照錯誤的程度倒扣之.
若使用羅必達法則要檢查條件 $0/0$ 或者 ∞/∞ 且函數在極限點附近處處可微 (2%).

7. (10%) 考慮曲線 Γ： $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$，求介於 Γ, $y = 0$, $x = 0$ 和 $x = 1$ 間的區域之面積。

Solution:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^1 (e^x + e^{-x})dx(4pts) &\overset{(4pts)}{=\!=} \frac{1}{2}e^x\Big|_0^1 - \frac{1}{2}e^{-x}\Big|_0^1 \\
&\overset{(2pts)}{=\!=} \left(\frac{e}{2} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2e} - \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{e}{2} - \frac{1}{2e}
\end{aligned}$$

8. (10%) 假設一個美式足球的輪廓是一個橢圓 $\dfrac{x^2}{196}+\dfrac{y^2}{81}=1$。求此美式足球的體積。

Solution:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-14}^{14} \pi y^2 dx \\
&= 2\pi \int_0^{14} 81(1-\frac{x^2}{196})dx \\
&= 162\pi(x-\frac{1}{196}\cdot\frac{x^3}{3})\Big|_0^{14} \\
&= 1512\pi
\end{aligned}
$$