1042微乙01-05班期末考解答和評分標準

1. (10%) 解微分方程 $\begin{cases} y' + (\tan t)\, y = t \sin 2t, & \frac{-\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

Solution:

Let $u = e^{\int \tan t dt}$. (3 pts)
Since $\int \tan t dt = -\ln \cos t$, we have $u = \frac{1}{\cos t}$.
$uy' + (u \tan t) y = tu \sin 2t$.
$\Rightarrow (uy)' = tu \sin 2t$
$\Rightarrow (\frac{1}{\cos t} y)' = t \frac{1}{\cos t}(2 \sin x \cos x)$
$\Rightarrow (\frac{1}{\cos t} y)' = 2t \sin t$ (3 pts)
$\Rightarrow \frac{1}{\cos t} y = \int 2t \sin t dt = -2t \cos t + 2 \int \cos t dt = -2t \cos t + 2 \sin t + C$. (2 pts)
Since y(0)=1,
$\Rightarrow C = 1$
$\Rightarrow y = -2t \cos^2 t + 2 \sin t \cos t + \cos t$ (2 pts)

2. (15%) 解微分方程 $\frac{dy}{dx} = e^y \sin x$.

Solution:

$$\int e^{-y} dy = \int \sin x dx \text{ (7 points)}$$
$$\Rightarrow -e^{-y} = -\cos x + C$$

Integrate $\int e^{-y} dy$: 3 points
Integrate $\int \sin x dx$: 3 points
The constant C : 2 points

3. (10%) 某一化學反應為考慮物質 P 的分子與物質 Q 的分子之間的碰撞，產生一新的物質 X。即 P+Q→X。若 $p, q, (p \neq q)$ 分別為物質 P 與 Q 的初始濃度，$x(t)$ 為物質 X 在 t 時間的濃度。則 $p - x(t)$ 與 $q - x(t)$ 分別為 P 與 Q 在 t 時間的濃度。此化學反應遵守以下微分方程
$$\frac{dx}{dt} = \alpha (p - x)(q - x),$$
其中 α 為大於零的常數。若 $x(0) = 0$，求解 $x(t)$.

Solution:

$$\frac{dx}{(p-x)(q-x)} = \alpha\, dt$$
$$\int \frac{dx}{(p-x)(q-x)} = \int \alpha\, dt$$
$$\int \alpha\, dt = \alpha t + C$$
$$\frac{1}{(p-x)(q-x)} = \frac{1}{q-p}\left(\frac{1}{p-x} - \frac{1}{q-x}\right)$$
$$\int \frac{dx}{(p-x)(q-x)} = \int \frac{1}{q-p}\left(\frac{1}{p-x} - \frac{1}{q-x}\right) dx = \frac{1}{q-p} \ln\left|\frac{q-x}{p-x}\right|$$

So,
$$\frac{1}{q-p} \ln\left|\frac{q-x}{p-x}\right| = \alpha t + C$$

Since $x(0) = 0$, we have
$$\frac{1}{q-p} \ln\left|\frac{q}{p}\right| = C$$

Therefore, we have
$$\frac{1}{q-p} \ln\left|\frac{q-x}{p-x}\right| = \alpha t + \frac{1}{q-p} \ln\left|\frac{q}{p}\right|$$

Solve for x, we get

$$x(t) = \frac{q(1 - e^{\alpha(q-p)t})}{1 - \frac{q}{p}e^{\alpha(q-p)t}}$$

本題分成六個部分(1)至(6)評分:

(1) i. 誤判微分方程之形式，本題0分，並且無後續評分。
ii. 僅分離變數無後續計算，得1分
iii. 僅分離變數有後續計算，得3分

(2) i. 成功積分出$\int \alpha\, dt = \alpha t + C$，得1分

(3) i. 有嘗試將積分項$\frac{1}{(p-x)(q-x)}$拆解成部分分式，得1分
ii. 成功拆解得$\frac{1}{(p-x)(q-x)} = \frac{1}{q-p}(\frac{1}{p-x} - \frac{1}{q-x})$，得2分

(4) i. 在上一部份失誤，但有進行正確的積分運算，唯與實際所求有所差距，得1分
ii. 成功積分得$\frac{1}{q-p}\ln|\frac{q-x}{p-x}|$，得2分

(5) i. 有考慮初始條件並進行實質運算，得1分

(6) i. 成功得出$x(t) = \frac{q(1-e^{\alpha(q-p)t})}{1-\frac{q}{p}e^{\alpha(q-p)t}}$，得1分

其他狀況依類似評分標準斟酌給分。

4. (10%) 若 X 為一隨機變數，X 在 $\{1, 2\}$ 取值且 $\mathrm{E}(X) = \frac{5}{3}$.
(a) (5%) 求 $P(X = 1)$ 及 $P(X = 2)$.
(b) (5%) 求 $\mathrm{Var}(X)$.

Solution:
Put $P(X = 1) = p$ and $P(X = 2) = q$, then

$$p + q = 1.$$

By assumption, $\frac{5}{3} = E(X) = 1 \cdot p + 2 \cdot q$. Then, solve the following system

$$\begin{cases} p + q = 1 \\ p + 2q = \frac{5}{3} \end{cases}$$

we get

$$\begin{cases} P(X = 1) = p = \frac{1}{3} \\ P(X = 2) = q = \frac{2}{3} \end{cases}$$

本小題分成三個部分(1)至(3)評分:

(1) i. 列出連續型隨機變數之類的無關公式，本題0分，並且無後續評分
ii. 僅列出離散型隨機變數之期望值公式而無後續計算，得1分
iii. 僅列出離散型隨機變數之期望值公式而有後續計算，得2分

(2) i. 有列出$P(X = 1) + P(X = 2) = 1$並進行實質運算，得2分

(3) i. 正確得到期望值，得1分

其他狀況依類似評分標準斟酌給分。

Since $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ and

$$E(X^2) = 1^2 \cdot P(X = 1) + 2^2 \cdot P(X = 2) = 1^2 \cdot \frac{1}{3} + 2^2 \cdot \frac{2}{3} = 3$$

So,

$$Var(X) = 3 - (\frac{5}{3})^2 = \frac{2}{9}$$

本小題分成三個部分(1)至(3)評分:

(1) i. 列出連續型隨機變數之類的無關公式，本題0分，並且無後續評分
ii. 僅列出離散型隨機變數之變異數公式而無後續計算，得1分
iii. 僅列出離散型隨機變數之變異數公式而有後續計算，得2分

(2) i. 成功執行上一部份並對$E(X^2)$項進行實質運算但計算錯誤，得1分
ii. 成功執行上一部份並正確計算$E(X^2)$項，得2分

(3) i. 正確得到變異數，得1分

其他狀況依類似評分標準斟酌給分。

5. (10%) 求 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+2bx+c}dx,\ b, c \in \mathbb{R}$. (可用 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.)

Solution:

$\because \quad x^2 - 2bx - c = (x-b)^2 - (b^2+c) \quad$ (7 pts)

$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \exp(b^2+c)\exp(-(x-b)^2)dx = \exp(b^2+c)\sqrt{\pi} \quad$ (3 pts)

6. (10%) 令 X, Y 為兩個隨機變數，$f_X(t) = e^{-t}, t \geq 0$ 且 $Y = 2X+1$. 求 $f_Y(t)$.

Solution:

$$\begin{aligned} F_Y(y) =& P(Y \leq y) \text{ (3 points)} \\ =& P(2X+1 \leq y) \\ =& P(X \leq \frac{y-1}{2}) \\ =& \int_0^{\frac{y-1}{2}} e^{-t}dt \text{ (3 points)} \\ =& 1 - e^{\frac{1-y}{2}},\ y \geq 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{1}{2}e^{\frac{1-y}{2}},\ y \geq 1 \text{ (4 points)}$$

7. (10%) 若機率密度函數 $f_X(t) = f_Y(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}, t \in \mathbb{R}$ 且隨機變數 X, Y 獨立。令 $W = (X+Y)^2$，求 W 的機率密度函數 $f_W(t)$.

Solution:

Let $Z = X + Y$

$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)f_Y(z-t)dt \quad$ (2pts)

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(\frac{-z^2}{2})\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\exp(-2(t-\frac{z}{2})^2)dt($ 3pts for Improper Integral)

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(\frac{-z^2}{2})$ (2pts)

Let $W = Z^2$

For $t \geq 0, P(W \leq t) = P(-\sqrt{t} \leq Z \leq \sqrt{t})$(1 pts)

$f_W(t) = f_Z(\sqrt{t})\frac{1}{2\sqrt{t}} + f_Z(-\sqrt{t})\frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp(-\frac{t}{2})$ (2pts for pdf)

8. (10%) 某公司之電話通數平均每小時 20 通，求在 3 分鐘內至少有一通電話之機率。(假設此隨機現象遵守 Poisson 過程)

Solution:

$$\lambda = \frac{20}{60} = \frac{1}{3} \text{ (3 points)}$$
$$t = 3 \text{ (2 points)}$$
$$P(X = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} \text{ (3 points)}$$

Then the probability that there is at least one call within 3 minutes is

$$1 - P(X = 0) = 1 - \frac{1^0}{0!}e^{-1} = 1 - e^{-1} \text{ (2 points)}$$

9. (15%) 某城市中的電話通話時間長短不一，若隨機變數 X 為電話的通話長度，其機率密度函數為

$$f_X(t) = \frac{2}{5}e^{-\frac{2t}{5}},\ t > 0$$

其中 t 以分鐘為單位表示一個隨機電話的通話長度。

(a) (4%) 求電話通話長度在一分鐘以內的機率為何?

(b) (4%) 求電話通話長度大於一分鐘不滿兩分鐘的機率為何?

(c) (4%) 求電話通話長度超過三分鐘的機率為何?

(d) (3%) 求一通電話的平均通話長度是多少?

Solution:

$$f_X(t) = \frac{2}{5}e^{-\frac{2t}{5}}, t > 0$$

(a) $P(0 < X < 1) = \int_0^1 \frac{2}{5}e^{-\frac{2t}{5}}dt = 1 - e^{-\frac{2}{5}}$

(b) $P(1 < X < 2) = \int_1^2 \frac{2}{5}e^{-\frac{2t}{5}}dt = e^{-\frac{2}{5}} - e^{-\frac{4}{5}}$

(c) $P(X > 3) = \int_3^\infty \frac{2}{5}e^{-\frac{2t}{5}}dt = e^{-\frac{6}{5}}$

(d) $f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t > 0$為指數分配，其期望值為$E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{5}{2}$

注:

- (a)至(c)列出積分式得兩分，算出答案得兩分;
- (d)若列出$E(X) = \int_0^\infty \frac{2}{5}te^{-\frac{2t}{5}}dt$可得一分，算出結果得兩分。