微乙小考五 (2015/5/28)

1. (7%) 已知 $P(X=1,Y=3)=\frac{1}{4}$，$P(X=1,Y=4)=\frac{1}{4}$，$P(X=2,Y=3)=\frac{7}{24}$，$P(X=2,Y=4)=\frac{5}{24}$。求 $P(X^2+Y^2=10)$ 及 $\mathrm{E}(X^2+Y^2)$。

   sol: $P(X^2+Y^2=10)=P(X=1,Y=3)=\frac{1}{4}$

   $E(X^2+Y^2)=10\times\frac{1}{4}+17\times\frac{1}{4}+13\times\frac{7}{24}+20\times\frac{5}{24}=\frac{353}{24}$

2. (7%) X 為隨機變數，已知 $\mathrm{E}(X)=3$, $\mathrm{Var}(X)=2$, 求 $\mathrm{E}(X^2)$ 及 $\mathrm{E}((X+1)^2)$。

   sol: $E(X^2)=Var(X)+(E(X))^2=2+3^2=11$

   $E((X+1)^2)=E(X^2+2X+1)=E(X^2)+2E(X)+1=18$

3. (6%) 令 $W=k$, $k\geq 1$，表示在連續進行白努利試驗時，第 k 次試驗才首次出現 $+$。令 p 為一次白努利試驗出現正面之機率，設 $q=1-p$。求 $\mathrm{E}(W)$ 及 $\mathrm{Var}(W)$。

   sol: (i)

   $E(W)=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot P(W=k)=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot q^{k-1}p=p\cdot\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot q^{k-1}$

   and $\sum_{k=0}^{\infty}q^k=\frac{1}{1-q}$, So $\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot q^{k-1}=\frac{d}{dq}(\sum_{k=0}^{\infty}q^k)=\frac{d}{dq}(\frac{1}{1-q})=\frac{1}{(1-q)^2}$

   Thus, $E(W)=p\cdot\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot q^{k-1}=p\cdot\frac{1}{(1-q)^2}=\frac{1}{p}$.

   (ii)

   $E(W(W-1))=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)\cdot q^{k-1}p=pq\cdot\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)\cdot q^{k-2}$

   and $\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)\cdot q^{k-2}=\frac{d^2}{dq^2}(\sum_{k=0}^{\infty}q^k)=\frac{d}{dq}(\frac{1}{(1-q)^2})=\frac{2}{(1-q)^3}$

   So, $E(W^2)=E(W(W-1)+E(W))=\frac{2q}{p^2}+\frac{1}{p}$

   Then $Var(W)=E(W^2)-(E(W))^2=\frac{2q}{p^2}+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}=\frac{q}{p^2}$