微乙小考二 (2015/3/26)

1. (6%) 求曲面 $x^3+y^3+z^3=5xyz$ 在點 $(1,1,2)$ 之切平面方程式。

sol:

$$f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-5xyz$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}|_{(1,1,2)}=3x^2-5yz|_{(1,1,2)}=-7$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}|_{(1,1,2)}=3y^2-5xz|_{(1,1,2)}=-7$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}|_{(1,1,2)}=3z^2-5xy|_{(1,1,2)}=7$$

$$\nabla f|_{(1,1,2)}=(-7,-7,1)=(1,1,-1)$$

所以平面方程式為

$$(x-1)+(y-1)-(z-2)=0\Rightarrow x+y-z=0$$

2. (7%) 令函數 $f(x,y)=x^2e^y$，找一單位向量 $\vec{u}$ ($|\vec{u}|=1$) 使得 $\frac{\partial f}{\partial u}(1,0)$ 為最大。

sol:

$$\frac{\partial f}{\partial x}|_{(1,0)}=2xe^y|_{(1,0)}=2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}|_{(1,0)}=x^2e^y|_{(1,0)}=1$$

最大的向量即為$\nabla f=(2,1)$，換算成單位向量$=\vec{u}=(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}})$

3. (7%) 令 $f(x,y)=x^3-12xy+8y^3$ 找出 $f(x,y)$ 之所有極值候選點並決定其極值性質。

sol: 解聯立方程式 $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-12y=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=-12x+24y^2=0\end{cases}$

得到兩個點 $(x,y)=(0,0)$、$(2,1)$ 即為候選點

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-12,\quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}48y$$

$$D=\begin{vmatrix}6x & -12\\ -12 & 48y\end{vmatrix}=144(2xy-1)$$

$(0,0)$ 代入 D 後得 $D<0$，即為鞍點；$(2,1)$ 代入後得 $D>0$，又因為該點在 x 二次微分時為正，所以是極小值