

Chapter 3 Problems Plus

Chih-Kuang Lee

September 4, 2013

11. The figure shows a circle with radius 1 inscribed in the parabola $y = x^2$. Find the center of the circle.

這一題要怎麼做呢？我們把圓心那一點取名為 C 、交點為 P 好了。我們令圓心為

$$C = (0, s) \text{ for some } s > 0$$

因此圓的方程式為

$$x^2 + (y - s)^2 = 1$$

所以，下半圓的方程式為

$$y = s - \sqrt{1 - x^2}$$

為何挑下半圓呢？因為從圖上很明顯地我們需要的是下半圓的部分。接著，下半圓的導數是

$$y' = -\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

因為在 P 點相切，所以拋物線和下半圓在 P 點的微分是一樣的。故得到

$$2x = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

由於 x 不會是 0，等式兩邊同除 x 之後再兩邊平方，得到

$$4 = \frac{1}{1-x^2}$$

解得 $x^2 = 3/4$ ，因此 $y = x^2 = 3/4$ ，也就是說我們知道了 P 點的座標。最後，把這個結果帶回下半圓方程，得到

$$\frac{3}{4} = s - \sqrt{1 - \frac{3}{4}}$$

算出來 $s = 5/4$ ，因此 C 點的座標為 $(0, 5/4)$ ！■

14. Tangent lines T_1 and T_2 are drawn at two points P_1 and P_2 on the parabola $y = x^2$ and they intersect at a point P . Another tangent line T is drawn at a point between P_1 and P_2 ; it intersects T_1 at Q_1 and T_2 at Q_2 . Show that

$$\frac{|PQ_1|}{|PP_1|} + \frac{|PQ_2|}{|PP_2|} = 1$$

如果看不懂題目在說什麼的話，最好自己畫個圖幫助理解。
我們假設

$$P_1 = (a, a^2)$$

$$P_2 = (b, b^2)$$

至於介於 P_1 和 P_2 中間的切點，我們叫做 Q 點好了！然後假設

$$Q = (c, c^2)$$

在繼續算下去之前，來看一下較一般的狀況。

我們知道在拋物線上 (t, t^2) 這點的斜率是 $2t$ ，因此通過這個點的直線為

$$y = 2t(x - t) + t^2$$

化簡之後，得到

$$2tx - y = t^2$$

若在拋物線上有另一點 (s, s^2) ，則通過這兩個點的切線之交點為以下聯立方程式的解。

$$\begin{cases} 2tx - y = t^2 \\ 2sx - y = s^2 \end{cases}$$

解出來會得到

$$x = \frac{s+t}{2} \quad \text{and} \quad y = st$$

根據我們以上的討論，我們馬上就知道 P 、 Q_1 和 Q_2 點的座標為

$$P = \left(\frac{a+b}{2}, ab \right) \quad Q_1 = \left(\frac{a+c}{2}, ac \right) \quad Q_2 = \left(\frac{b+c}{2}, bc \right)$$

因此彼此之間的距離為

$$|PQ_1| = \frac{|b-c|}{2} \sqrt{1+4a^2} \quad |PQ_2| = \frac{|a-c|}{2} \sqrt{1+4b^2}$$

$$|PP_1| = \frac{|a-b|}{2} \sqrt{1+4a^2} \quad |PP_2| = \frac{|a-b|}{2} \sqrt{1+4b^2}$$

由於 c 介於 a 和 b 之間，因此 $|b-c| + |a-c| = |a-b|$ 。故

$$\begin{aligned} \frac{|PQ_1|}{|PP_1|} + \frac{|PQ_2|}{|PP_2|} &= \frac{|b-c|}{|a-b|} + \frac{|a-c|}{|a-b|} \\ &= \frac{|a-b|}{|a-b|} = 1 \end{aligned}$$

證明完畢。 ■

15. Show that

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^{ax} \sin bx) = r^n e^{ax} \sin(bx + n\theta)$$

where a and b are positive numbers, $r^2 = a^2 + b^2$, and $\theta = \tan^{-1}(b/a)$

遇到這種題目，通常都是使用數學歸納法居多。

首先，來看看微分一次的情形。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(e^{ax} \sin bx) &= ae^{ax} \sin bx + be^{ax} \cos bx \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} e^{ax} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin bx + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos bx \right) \\ &= re^{ax} (\cos \theta \sin bx + \sin \theta \cos bx) \\ &= re^{ax} \sin(bx + \theta) \end{aligned}$$

其實同學應該看的出來，這題要熟悉三角函數的疊合才有辦法把式子化簡成我們要的型。

現在假設微分 k 次，等式也成立。那我們來看看微分 $k + 1$ 次的情形。

$$\begin{aligned} \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}(e^{ax} \sin bx) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{d^k}{dx^k} e^{ax} \sin bx \right) \\ &= \frac{d}{dx} r^k e^{ax} \sin(bx + k\theta) \\ &= r^k [ae^{ax} \sin(bx + k\theta) + be^{ax} \cos(bx + k\theta)] \\ &= r^k e^{ax} \sqrt{a^2 + b^2} \left[\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin(bx + k\theta) + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos(bx + k\theta) \right] \\ &= r^{k+1} e^{ax} [\cos \theta \sin(bx + k\theta) + \sin \theta \cos(bx + k\theta)] \\ &= r^{k+1} e^{ax} \sin[bx + (k + 1)\theta] \end{aligned}$$

其中中間幾步再次用了三角函數的疊合。

因此根據數學歸納法原理，原敘述成立。 ■

19. (a) Use the identity for $\tan(x - y)$ to show that if two lines L_1 and L_2 intersect at an angle α , then

$$\tan \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

where m_1 and m_2 are the slopes of L_1 and L_2 , respectively.

我們令 θ_1 、 θ_2 分別為 L_1 、 L_2 和 x 軸的交角。則根據斜率的定義，我們有

$$m_1 = \tan \theta_1 \quad \text{and} \quad m_2 = \tan \theta_2$$

因此 $\alpha = \theta_2 - \theta_1$ ，我們得到

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \tan(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\tan \theta_2 - \tan \theta_1}{1 + \tan \theta_1 \tan \theta_2} \\ &= \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\end{aligned}$$

其實兩條線的交角有兩個，但題目也沒特別說是哪一個交角，因此姑且就令 $\alpha = \theta_2 - \theta_1$ 來滿足我們的證明。■

19. (b) Use part (a) to find, correct to the nearest degree, the angle between each pair of curves at each point of intersection.

- (i) $y = x^2$ and $y = (x - 2)^2$
(ii) $x^2 - y^2 = 3$ and $x^2 - 4x + y^2 + 3 = 0$

這一題也沒有很難，先求出兩曲線的交點，然後在算出兩曲線在該點的導數，就可以算出夾角。我們從第一小題開始吧！假設夾角為 α ，令

$$x^2 = (x - 2)^2$$

可以解出一個解 $x = 1$ ，因此交點為 $(1, 1)$ 。然後該點的導數也很容易求得，分別為 2 和 -2，故我們可以算出

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \frac{(-2) - 2}{1 + 2 \times (-2)} = \frac{4}{3} \\ \alpha &\approx 53^\circ \quad \blacksquare\end{aligned}$$

接下來看第二題吧！第一條方程式是雙曲線，第二條則是橢圓，整理一下可以得到

$$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} = 1 \quad \text{and} \quad (x - 2)^2 + y^2 = 1$$

整理過後可以看出，這兩條曲線的交點是上下對稱的兩個點。於是令

$$x^2 - 3 = -x^2 + 4x - 3$$

算出來得到 $x = 0$ 或者是 $x = 2$ ，不過顯然地 0 不是解，因此再把 $x = 2$ 代入曲線，可以得到 $y = \pm 1$ 。因此兩個交點分別是 $(2, 1)$ 和 $(2, -1)$ 。

接下來我們來計算交點的導數，不過因為這兩個交點上下對稱（連圖形也上下對稱），因此我們只算上面的那一個即可。

首先假設交角為 β ，接著兩個函數先分別只取上半部

$$y = \sqrt{x^2 - 3} \quad \text{and} \quad y = \sqrt{1 - (x - 2)^2}$$

然後微分得到

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3}} \quad \text{and} \quad y = \frac{-x + 2}{\sqrt{1 - (x - 2)^2}}$$

因此求得在該點的導數分別為 2 和 0，因此可以知道

$$\begin{aligned}\tan \beta &= \frac{2 - 0}{1 + 2 \times 0} = 2 \\ \beta &\approx 63^\circ \quad \blacksquare\end{aligned}$$

21. What happens to the point R as P is taken closer and closer to the axis?

學過高三物理中的光學的同學應該都會知道答案是 R 會趨近於 AO 的中點，不過我們還是要來證明一下。

不失一般性，我們就把這個半圓放到座標上吧！我們假設圓的半徑為 1，且圓心在圓點上。故上半圓的方程式為

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

為何只有上半圓呢？因為下半圓用不到。

我們假設 P 點的高度為 t ，將之帶入半圓方程式可得 Q 點為 $(-\sqrt{1-t^2}, t)$ ！又 QO 直線的斜率為 $-t/\sqrt{1-t^2}$ ，因此根據前面第19題的經驗，我們知道 QR 的斜率為

$$\frac{2 \times \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}}{1 - \left(\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\right)^2} = \frac{\frac{-2t}{\sqrt{1-t^2}}}{1 - \frac{t^2}{1-t^2}} = \frac{-2t\sqrt{1-t^2}}{(1-t^2) - t^2} = -\frac{2t\sqrt{1-t^2}}{1-2t^2}$$

是故 QR 直線的方程式可以寫成

$$y - t = -\frac{2t\sqrt{1-t^2}}{1-2t^2}(x + \sqrt{1-t^2})$$

令 $y = 0$ ，我們就能得到 R 點的座標，因此把 $y = 0$ 帶入後得到

$$\begin{aligned} x &= \frac{1-2t^2}{2\sqrt{1-t^2}} - \sqrt{1-t^2} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{1-t^2}} \end{aligned}$$

最後，令 $t \rightarrow 0$ ，我們發現

$$\lim_{t \rightarrow 0} -\frac{1}{2\sqrt{1-t^2}} = -\frac{1}{2\sqrt{1-0^2}} = -\frac{1}{2}$$

確實當 P 點靠近 x 軸時， R 點就趨近 $-1/2$ ，如同我們所預期！■

25. For what value of k does the equation $e^{2x} = k\sqrt{x}$ have exactly one solution?

這題要怎麼做呢？只有一解有兩種情況，第一種是兩條線僅交會在一點，另一種情況是兩條線僅相切在一點。不過 e^{2x} 的斜率是遞增的，而 $k\sqrt{x}$ 的斜率是遞減的，因此第一種情況是不會出現的！

如果是第二種情形的話，相切處的導數是相同的。因此我們把該等式兩邊微分，得到

$$2e^{2x} = \frac{k}{2\sqrt{x}}$$

比較原式和這個式子，我們可以得到

$$k\sqrt{x} = \frac{k}{4\sqrt{x}}$$

算出來是 $x = 1/4$ ，也就是如果兩條函數圖形真的有相交且切於一點的話，該點的 x 值是 $1/4$ 。將之代入原式，得到

$$e^{2 \times \frac{1}{4}} = k\sqrt{\frac{1}{4}}$$

解得

$$k = 2\sqrt{e} \blacksquare$$

28. Given an ellipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, where $a \neq b$, find the equation of the set of all points from which there are two tangents to the curve whose slopes are (a) reciprocals and (b) negative reciprocals.

看得懂題目要問什麼嗎？(a) 是問說橢圓上兩個點切線斜率互為倒數的話，就把他們的切線交點蒐集起來，然後問所有這種點所形成的圖形的方程式；而 (b) 則是問負倒數的情形。

在開始問題之前，我們先來看看整體的情況。考慮橢圓外一點 (α, β) ，則通過他的直線方程式為

$$y = m(x - \alpha) + \beta$$

倘若這一條直線和橢圓相切，那我們可以將之代入橢圓方程式而得到

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{[m(x - \alpha) + \beta]^2}{b^2} = 1$$

稍加整理後，得到

$$(a^2m^2 + b^2)x^2 + 2ma^2(\beta - m\alpha)x + a^2[(\beta - m\alpha)^2 - b^2] = 0$$

由於是相切，因此這個一元二次方程式的判別式應為 0，故我們得到

$$[2ma^2(\beta - m\alpha)]^2 - 4(a^2m^2 + b^2) \cdot a^2[(\beta - m\alpha)^2 - b^2] = 0$$

經過稍繁複的化簡後，我們算出

$$(a^2 - \alpha^2)m^2 + 2\alpha\beta m + (b^2 - \beta^2) = 0 \quad (1)$$

我們現在可以來做 (a) 小題了！現在假設 (α, β) 就是該圖形上的一點，則通過此點的兩條切線斜率分別為 m 和 m^{-1} ，且這兩個斜率會是 (1) 的解！由根與係數的關係，我們得到

$$\frac{b^2 - \beta^2}{a^2 - \alpha^2} = 1$$

移項後得到 $\alpha^2 - \beta^2 = a^2 - b^2$ ，也就是說此圖形的軌跡方程式為

$$\Gamma_a : x^2 - y^2 = a^2 - b^2 \blacksquare$$

接著我們來看看 (b) 小題。由於通過 (α, β) 的兩條切線的斜率為 m 和 $-m^{-1}$ ，而他們也是 (1) 的解，再次根據根與係數的關係，我們發現

$$\frac{b^2 - \beta^2}{a^2 - \alpha^2} = -1$$

移項後得到 $\alpha^2 + \beta^2 = a^2 + b^2$ ，也就是此圖形的軌跡方程式為

$$\Gamma_b : x^2 + y^2 = a^2 + b^2 \blacksquare$$

29. Find the two points on the curve $y = x^4 - 2x^2 - x$ that have a common tangent line.

我們知道一個首項係數為正的四次的多項式，圖形通常會長成類似麥當勞標誌的倒過來，因此這條切線的存在性可想而知。為了方便討論，先假設那兩點分別為 A 和 B ，並且令 A 的 x 座標為 α 、 B 的 x 座標為 β 。且 $\alpha < \beta$ 。

首先，這個函數的導數為

$$y' = 4x^3 - 4x - 1$$

接著，令這條切線為

$$L: y = mx + k$$

其中 $m = 4\alpha^3 - 4\alpha - 1$ 。因此 α 和 β 應該為

$$(x^4 - 2x^2 - x) - (mx + k) = 0 \quad (2)$$

的兩個重根。為何是重根呢？因為如果是單根(simple root)的話是不會相切的。

既然 α 和 β 分別都是重根，上述的等式可以寫成

$$(x - \alpha)^2(x - \beta)^2 = 0$$

展開得到

$$x^4 - 2(\alpha + \beta)x^3 + (\alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2)x^2 - \alpha\beta(\alpha + \beta)x + \alpha^2\beta^2 = 0 \quad (3)$$

和 (2) 式比較三次項的係數，可以發現 $\beta = -\alpha$ ，故 (3) 式可以改寫成

$$x^4 - 2\alpha^2x^2 + \alpha^4 = 0$$

再和 (2) 式比較平方項係數，得到 $\alpha^2 = 1$ ，因此 $\alpha = -1$ 、 $\beta = 1$ 。

所以 $A = (-1, 0)$ 、 $B = (1, -2)$ 即為所求。■

30. Suppose that three points on the parabola $y = x^2$ have the property that their normal lines intersect at a common point. Show that the sum of their x -coordinates is 0.

首先，假設這三點分別為 $A = (a, a^2)$ 、 $B = (b, b^2)$ 、 $C = (c, c^2)$ 。

在繼續往下做之前，我們先來看一下較一般的狀況。通過 (t, t^2) 這一點的切線斜率為 $2t$ ，那麼法線的斜率就是 $-1/2t$ 了！因此 (t, t^2) 的法線直線方程式為

$$y - t^2 = -\frac{1}{2t}(x - t)$$

整理一下，我們得到

$$x + 2ty = 2t^3 + t \quad (4)$$

因此，通過這三點所形成的三條法線分別為

$$\begin{cases} x + 2ay = 2a^3 + a \\ x + 2by = 2b^3 + b \\ x + 2cy = 2c^3 + c \end{cases}$$

觀察上面三個式子，我們發現 a 、 b 、 c 都是 (4) 的解（以 t 為變數的三次多項式）。

由於平方項的係數是 0，根據根與係數的關係，我們就知道 $a + b + c = 0$ ！

同學可能會說這裡的 x 、 y 不是定數，不過會同時滿足這三條式子的 x 、 y 就是這三條法線的交點，因此固定這一個特別的 x 、 y ，我們便得到我們要的結果。■

31. Find the smallest value of r such that any line with slope $\frac{2}{5}$ intersects some of these circles.

這題看起來複雜，不過問題其實可以簡化為：在 $(0, 0)$ 和 $(0, 1)$ 上分別作兩個半徑為 r 的圓。則 r 至少要是多少，才有辦法讓通過 $(0, 0)$ 和 $(0, 1)$ 之間所有斜率為 $\frac{2}{5}$ 的直線都和這兩個圓至少交於一點？

由於上下兩圓的對稱，我們知道最極端的狀況就是下述直線

$$L: y = \frac{2}{5}x + \frac{1}{2}$$

和上下兩個圓分別相切。因此半徑其實就是圓點到這條直線的距離！

假設同學忘記高中怎麼做點到直線的距離了，那就現學現用微積分的方法吧！由於我們只需要下面那個圓的上半圓，因此可以把圓方程式寫成

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

而其導函數為

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

我們令 $y' = 2/5$ ，這樣就可以求出切點的 x 座標了！等號兩邊平方，我們得到

$$\frac{4}{25} = \frac{x^2}{r^2 - x^2}$$

算出來得到 $x = -\frac{2}{\sqrt{29}}r$ ，因此這一點的 y 值為 $\frac{5}{\sqrt{29}}r$ 。將這兩項代入直線 L ，得到

$$\frac{5}{\sqrt{29}}r = \frac{2}{5} \times \frac{-2}{\sqrt{29}}r + \frac{1}{2}$$

最後解得

$$r = \frac{5}{2\sqrt{29}}$$

這就是我們要的答案囉！如果同學還記得高中的點到直線距離的算法的話，也是可以直接算出來：

$$\begin{aligned} r &= \frac{\left| \frac{2}{5} \times 0 - 1 \times 0 + \frac{1}{2} \right|}{\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + 1^2}} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{5}\sqrt{29}} = \frac{5}{2\sqrt{29}} \end{aligned}$$

兩種做法都行。 ■