第 9 章

無窮級數 (Infinite Series)

目錄

9.1 數列 (Sequences)

數列定義

定義 9.1.1. 數列 (sequence) 是一個定義在正整數 $\mathbb{N}$ 上之函數。若此函數爲 f, 我們常將 $f(n)$ 記爲 a_n 。數列可記爲 $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$、$\{a_n\}$ 或 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$。其中 a_1 稱爲首項(first term), a_n 稱爲第 n 項。

[註] 一個數列可以由函數圖形來瞭解其性質。

數列的例子

例 9.1.2. (1) $a_n = \sqrt{n}, \quad \{a_n\} = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n}, \ldots\}$。

(2) $b_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \quad \{b_n\} = \{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots\}$。

(3) $c_n = \frac{n-1}{n}, \quad \{c_n\} = \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots\}$。

(4) $d_n = (-1)^{n+1}, \quad \{d_n\} = \{1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots\}$。

例 9.1.3. 以遞迴公式定義的數列, 是給定頭幾項, 再利用前幾項, 由遞迴公式 (recursion formula) 求出下一項。

(1) $a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + 1$ 。

(2) $a_1 = 1, a_n = na_{n-1}$ 。

(3) 牛頓法: $x_0 = 1, x_{n+1} = x_n - (\frac{\sin x_n - x_n^2}{\cos x_n - 2x_n})$ 。此數收斂到 $\sin x - x^2 = 0$ 的根。

(4) Fibonacci 數列: $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ 。

數列的極限

定義 9.1.4. (1) 一個數列 $\{a_n\}$ 若滿足 $\forall\ \epsilon > 0, \exists N$ 使得若 $n > N$ 則 $|a_n - L| < \epsilon$, 則稱 $\{a_n\}$ 的極限 (limit) 爲 L。可記爲 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ 或 "當 $n \to \infty, a_n \to L$"。

(2) 若極限存在, 我們稱該數列收斂 (converge), 否則稱爲發散 (diverge)。

(3) 令 $\{a_n\}$ 爲一數列。若對任一數 M, 均存在 N, 使得 $\forall n > N \Rightarrow a_n > M$, 則稱 $\{a_n\}$ 發散到無限大 (diverges to infinity)。記爲 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, 或 $a_n \to \infty$。

(4) 若對任一數 m, 均存在 N, 使得 $\forall n > N \Rightarrow a_n < m$, 則稱 $\{a_n\}$ 發散到負無限大 (diverges to negative infinite)。記爲 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, 或 $a_n \to -\infty$。

例 9.1.5. (1) $\lim\limits_{n\to\infty} k = k$。

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$。

(3) 若 $r > 0, \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} = 0$。

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$。

例 9.1.6. 討論數列 $\{r^n\}$ 的斂散性。

例 9.1.7. 數列 $\{1, -1, 1, -1, \dots (-1)^{n+1}, \dots\}$ 爲發散。

[註] 一個發散數列不見得發散到正或負無限大, 如 $\{1, -2, 3, -4, 5, -6, \dots\}$ 及 $\{1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, \dots\}$。

數列極限的基本性質

性質 9.1.8. 若 $\{a_n\}$ 及 $\{b_n\}$ 爲兩收斂數列, c 爲常數。則

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$。

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$。

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n$。

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$。

(5) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$。

(6) 若 $p \in \mathbb{R}$ 且 $a_n > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^p = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^p$。(若 $p < 0$, 則要求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$。)

例 9.1.9. 求以下各極限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} (-\frac{5}{n^2})$。

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{n-1}{n})$。

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4-7n^6}{n^6+3}$。

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} (n - \sqrt{n+1}\sqrt{n+3})$。

定理 9.1.10. (1) 令 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 爲實數數列。若對大於某數 N 的所有 n, $a_n \leq b_n$ 均成立, 且兩數列之極限均存在, 則 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

(2) (三明治定理, 夾擊定理, Sandwich Theorem, Squeeze Theorem) 令 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 爲實數數列。若對大於某數 N 的所有 n, $a_n \leq b_n \leq c_n$ 均成立。假設 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$, 則 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$。

例 9.1.11. (1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$, 則 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$。

(2) 若 $|b_n| \leq c_n$, 且 $c_n \to 0$, 則 $b_n \to 0$。

(3) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 且 $\{b_n\}$ 爲有界, 則 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$。

[註] 若 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| \neq 0$, 則 (1) 不見得成立。

例 9.1.12. 求以下各極限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$

定理 9.1.13 (數列的連續函數定理, The continuous function theorem for sequences)**.** 令 $\{a_n\}$ 爲一實數列, 且 $a_n \to L$。若 $f(x)$ 是一個函數, 在 a_n 上均有定義, 且在 L 連續, 則 $f(a_n) \to f(L)$。

[註] 連續的條件是必要的。例: 令 $f(x) = \lfloor x \rfloor$, $a_n = \frac{n-1}{n}$, 則 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, 但 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = 0 \neq f(1)$.

例 9.1.14. 求以下各極限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

定理 9.1.15. 若 $f(x)$ 定義在區間 $[n_0, \infty)$上, 且 $\{a_n\}$ 爲一數列滿足 $a_n = f(n)$, $\forall n \geq n_0$, 則

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

[註] 此定理逆敘述不見得成立。例如 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n\pi = 0$, 但 $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x\pi$ 不存在。

例 9.1.16. 以任意方法求以下各極限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}$。

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n^2}{5n^2}$。

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{5n}$。

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{x}{n})^n$。

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{n+1}{n-1})^n$ 。

(6) $\lim\limits_{n\to\infty} x^{\frac{1}{n}}$, $(x > 0)$。

(7) $\lim\limits_{n\to\infty} x^n$, $(|x| < 1)$ 。

(8) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$。

(9) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2}$。

(10) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n}$。

(11) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!}$。

(12) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$。

例 9.1.17. 求以下各極限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\tan^{-1} n}{n}$。

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} n \sin\frac{1}{n}$。

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln 2n}$。

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} (\ln(n+1) - \ln n)$。

升降性與有界性

定義 9.1.18. (1) 若 $a_n < a_{n+1}$ $\forall n \geq 1$, 則 $\{a_n\}$ 稱爲上升數列。

(2) 若 $a_n \leq a_{n+1}, \forall n$, 則稱 $\{a_n\}$ 爲非下降數列 (nondecreasing sequence)。

(3) 若 $a_n > a_{n+1}$ $\forall n \geq 1$, 則 $\{a_n\}$ 稱爲下降數列。

(4) 若 $a_n \geq a_{n+1}, \forall n$, 則稱 $\{a_n\}$ 爲非上升數列 (nondecreasing sequence)。

(5) $\{a_n\}$ 爲上升或下降數列, 則統稱爲單調 (monotonic)。

(6) 若存在 N, 使得 $a_n < a_{n+1}, \forall\ n > N$, 則稱 $\{a_n\}$ 爲終極上升 (ultimately increasing) 數列。

定義 9.1.19. (1) 若 存在 M, 使得 $a_n \leq M, \forall n$, 則稱 $\{a_n\}$ 爲有上界 (bounded above), 且 M 稱爲上界 (upper bound)。

(2) 存在 N, 使得 $a_n \geq N, \forall n$, 則稱 $\{a_n\}$ 爲有下界 (bounded below), 且 M 稱爲下界 (lower bound)。

(3) $\{a_n\}$ 有上界且有下界, 則稱爲有界數列 (bounded sequence)。

例 9.1.20. 以下爲非下降數列:

(1) $\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$

(2) $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots\}$,

(3) $\{3, 3, 3, \ldots\}$。

其中 (1) 有下界, 沒有上界, (2) 有界。

例 9.1.21. $\left\{\frac{3}{n+5}\right\}$、$\left\{\frac{n}{n^2+1}\right\}$ 爲下降數列。

定理 9.1.22. (單調數列定理 monotonic sequence theorem) 一個非下降數列收斂的充要條件是它有上界。

[註] 此定理之反例:

(1) 並非有界數列必收斂, 例如 $\{(-1)^n\}$。

(2) 並非單調數列必收斂, 例如 $\{n\}$。

例 9.1.23. 定義數列 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 。

例 9.1.24. 討論數列 $\{a_n\}$ 之斂散性, 其中

(a) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6)$。

(b) $a_1 = 10$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6)$。

(c) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2(a_n + 6)$。

[習題] 9.1.25. Determine whether the sequence converges or diverges. If it converges, find the limit.

(a) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}n}{n^2+1}$

(b) $a_n = \frac{(-1)^n n^3}{n^3+2n^2+1}$

(c) $a_n = \frac{(2n-1)!}{(2n+1)!}$,

(d) $a_n = \sqrt[n]{2^{1+3n}}$,

(e) $a_n = 2^{-n}\cos n\pi$,

(f) $a_n = \frac{\sin 2n}{1+\sqrt{n}}$,

(g) $a_n = \frac{n!}{2^n}$.

[習題] **9.1.26.** (a) Determine whether the sequence defined as follows is convergent or divergent: $a_1 = 1, a_{n+1} = 4 - a_n$ for $n \geq 1$.

(b) What happens if the first term is $a_1 = 2$?

[習題] **9.1.27.** Determine whether the sequence is increasing, decreasing, or not monotonic. Is the sequence bounded?

(a) $a_n = \frac{2n-3}{3n+4}$,

(b) $a_n = ne^{-n}$,

(c) $a_n = n + \frac{1}{n}$.

9.2 無窮級數 (Infinite Series)

例 9.2.1. 如何求 $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$?

[註] Guido Ubaldus 自認爲證明了神的存在, 因爲 "something has been created out of nothing"。

定義 9.2.2. (1) 給定一數列 $\{a_n\}$, 則 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ 稱爲一無窮級數 (infinite series), 其中 a_n 稱爲級數的第 n 項。

(2) 令 $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, 則數列 $\{s_n\}$ 稱爲部份和數列 (sequence of partial sums), 其中 s_n 稱爲第 n 個部份和。

(3) 若數列 $\{s_n\}$ 收斂, 且 $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, 則稱 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂 (converges), 且 s 稱爲此級數的和, 記爲 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$。若數列 $\{s_n\}$ 發散, 則稱此級數爲 發散 (diverges)。

(4) 若級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂, 則 $R_n = s - s_n$ 稱爲 n 次餘項 (remainder)。

註 9.2.3. (1) 將一級數加入有限項或去掉有限項, 可能影響其和, 但並不會影響其斂散性。

(2) 只要保持級數各項的順序, 重新設定各項的指標並不會影響其斂散性。

例 9.2.4. 級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部份和爲 $s_n = 3 - n2^{-n}$, 求 a_n 及和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$。

級數之例

例 9.2.5. 幾何級數 (geometric series) $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$, 其中 r 爲公比, $a \neq 0$。若 $|r| < 1$, 則此級數收斂到 $\frac{a}{1-r}$; 若 $|r| \geq 1$, 則此級數發散。

例 9.2.6. 求下列各級數的和。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$,

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^n}{4^n}$,

(3) $5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \cdots$,

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n} 3^{1-n}$,

(5) 將一球從高 a 公尺處擲下。每當球落地後, 反彈的高度爲落下高度的 r 倍 $(0 < r < 1)$。求球往返的總距離。

(6) 循環小數 $5.23232323\cdots$ 。

例 9.2.7. 求 c 值, 使得 $\sum_{n=2}^{\infty}(1+c)^{-n} = 2$ 。

定理 9.2.8. (瞭望法, telescoping) 給定數列 $\{a_n\}$, 則級數 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$ 收斂的充要條件是 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在。且收斂時, 其和爲 $a_1 - \lim_{n\to\infty} a_n$ 。

例 9.2.9. 求下列各級數的和。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$,

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}$,

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+3n+1}{(n^2+n)^3}$ 。

定理 9.2.10. (1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂, 則 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$。

(2) (發散判斷法) 若 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 不存在或不爲 0, 則 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散。

[註] (1) 此定理之逆敍述不見得成立, 例如 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$。
(2) 此推論只能用來判斷級數之發散性, 對於級數之收斂性毫無助益。

例 9.2.11. 調和級數 (harmonic series) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 爲發散。

例 9.2.12. 判斷下列各級數的斂散性。

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2$,

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$,

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$,

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2+4}$ 。

例 9.2.13. 若級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (a_n \neq 0)$ 收斂, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 如何?

<u>級數運算</u>

定理 9.2.14. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 爲收斂級數, 則

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$。

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$。

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n - \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$。

註 9.2.15. (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 不見得成立。例如: $a_n = b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 。

(2) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 發散, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ 必爲發散。

(3) 即使 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 均爲發散, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ 仍可能收斂。例如 $a_n = 1$, $b_n = -1$, $\forall n$。

例 9.2.16. 判斷下列各級數的斂散性。

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}-1}{6^{n-1}}$,

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2^n}$,

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n}\right]$ 。

<u>正項級數</u>

定義 9.2.17. 若一級數的各項均爲非負實數, 則稱之爲正項級數 (series with positive terms)。

定理 9.2.18. 一個正項級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂的充要條件是它的部份和數列有上界。

[習題] 9.2.19. Determine whether the series is convergent or divergent. If it is convergent, find its sum.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{3^{n-1}}$,

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+2)}{(n+3)^2}$,

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{3^n}$,

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{2}$,

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\cos 1)^n$,

(f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{e^n} + \frac{1}{n(n+1)})$,

(g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}$,

(h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+3)}$,

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\cos \frac{1}{n^2} - \cos \frac{1}{(n+1)^2})$.

[習題] 9.2.20. Find the values of x for which the series converges. Find the sum of the series for those values of x.

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^n}$,

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^n x}{3^n}$,

(c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{nx}$.

9.3 積分審斂法 (Integral Test)

定理 9.3.1. (積分審斂法, integral test) 令 $\{a_n\}$ 爲一正項級數。若 $f(x)$ 爲定義在區間 $[N,\infty)$ 上的連續、正值、遞減函數, 且 $f(n)=a_n$, $\forall n \geq N$, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 與瑕積分 $\int_N^\infty f(x)dx$ 同斂散。

定理 9.3.2. (積分審斂法之餘項估計) 設 $f(x)$ 在 $x \geq 1$ 上爲連續、遞減、正值函數, 且 $a_n = f(n)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂。令 s_n 爲此數列的部份和, s 爲級數和, 且 $R_n = s - s_n$, 則

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \leq R_n \leq \int_n^{\infty} f(x)dx,$$

即

$$s_n + \int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \le s \le s_n + \int_n^{\infty} f(x)dx.$$

例 9.3.3. (1) 判斷 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ 之斂散。

(2) 判斷 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ 之斂散性。

定理 9.3.4. (p-級數) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收斂的充要條件爲 $p > 1$。

例 9.3.5. 分別求 p 值, 使以下級數收斂:

(1) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ 。

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{p}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ 。

例 9.3.6. (a) 利用前 10 項的和估計 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, 並估計誤差。

(b) 若要誤差小於 0.0005, 則要估計到第幾項?

[習題] 9.3.7. Determine whether the series is convergent or divergent.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$,

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$,

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+4}{n^2}$,

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$,

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$.

[習題] 9.3.8. Find the values of p for which the series is convergent.

(a) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln[\ln(\ln n)]^p}$,

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(1+n^2)^p$.

[習題] 9.3.9. Estimate $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$ correct to three decimal places.

[習題] 9.3.10. How many terms of the series $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ would you need to add to find its sum to within 0.01?

9.4 比較審斂法 (Comparison Test)

比較審斂法

定理 9.4.1. (比較審斂法) 令 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 為一正項級數, 則:

(1) 若存在收斂的級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 使得 $a_n \leq c_n, \forall n \geq N$, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂。

(2) 若存在發散的正項級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n$ 使得 $a_n \geq d_n, \forall n \geq N$, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散。

例 9.4.2. 判斷下列各級數的斂散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5}{5n-1}$ 。

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ 。

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2+4n+3}$ 。

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ 。

(5) $5 + \frac{2}{3} + \frac{1}{7} + 1 + \frac{1}{2+\sqrt{1}} + \frac{1}{4+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{2^n+\sqrt{n}} + \cdots$ 。

例 9.4.3. 利用前 100 項的和來估計 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+1}$, 並估計其誤差。

極限比較審斂法

定理 9.4.4. (極限比較審斂法, Limit Comparison Test) 設 $a_n, b_n > 0, \forall n > N$。

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = c > 0$, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 與 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 同斂散。

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收斂, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂。

(3) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \infty$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 發散, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散。

例 9.4.5. 判斷下列各級數的斂散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+2n+1}$ 。

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^5}}$ 。

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}$ 。

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+n\ln n}{n^2+5}$ 。

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-1}$ 。

例 9.4.6. (1) 若正項級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收斂, 則級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(a_n)$ 如何?

(2) 若正項級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 均收斂, 則級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 如何?

[習題] 9.4.7. Determine whether the series is convergent or divergent.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2\sqrt{n}}$,

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3+4n+3}}$,

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\tan^{-1} n}{n^{1.2}}$,

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+1}}{3^n-2}$,

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+4^n}{n+6^n}$,

(f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1+\frac{1}{n})^2 e^{-n}$,

(g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n}$,

(h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$,

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n})$,

(j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$,

(k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$,

(l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{e^n\sqrt{n}}$.

[習題] 9.4.8. Use the sum of first 10 terms to approximate the sum of the series $\sum\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4+1}}$. Estimate the error.

9.5 比例審斂法 (Ratio Test)

定理 9.5.1. (比例審斂法, d'Almbert) 令 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 爲一正項級數, 且設 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$, 則:

(1) 若 $\rho < 1$, 則 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂。

(2) 若 $\rho > 1$ 或 ρ 爲無限大, 則 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散。

(3) 若 $\rho = 1$, 則無法下結論。

例 9.5.2. 判斷以下級數之斂散:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4+3n^3+2n^2+4n+5}{3^n}$ 。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^{52}-2007n^{24}+100n-90)\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}$ 。

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+3n-1}}{n^2+5}$ 。

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n+5}{e^n}$ 。

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!}$ 。

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ 。

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n!n!}{(2n)!}$ 。

(8) $a_n = \begin{cases} \frac{n}{2^n} & n \text{ 爲奇數} \\ \frac{1}{2^n} & n \text{ 爲偶數} \end{cases}$ 。

例 9.5.3. 求正數 ℓ 及正整數 k 之值, 使得級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^\ell}{(kn)!}$ 收斂 。

例 9.5.4. (1) 考慮級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$, 利用 s_5估計此級數和, 並求其誤差 。

(2) 求 n 值, 使 s_n 的誤差小於0.00005 。

[習題] 9.5.5. Determine whether the series is convergence, or divergence.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot (2n)}{n!}$.

9.6 根式審斂法 (Root Test)

定理 9.6.1. (根式審斂法) 令 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 爲正項級數, 且設 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$, 則:

(a) 若 $\rho < 1$, 則 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂。

(b) 若 $\rho > 1$ 或 ρ 爲無限大, 則 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散。

(c) 若 $\rho = 1$, 則無法下結論。

例 9.6.2. 判斷以下級數之斂散:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+n}\right)^n$ 。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$ 。

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ 。

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ 。

(5) $a_n = \begin{cases} \frac{n}{2^n} & n \text{ 爲奇數} \\ \frac{1}{2^n} & n \text{ 爲偶數} \end{cases}$ 。

[習題] 9.6.3. Determine whether the series is convergence, or divergence.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n^2+1}{2n^2+1})^n$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (1+\frac{1}{n})^{n^2}$,

9.7 交錯級數 (Alternating Series)

定義 9.7.1. 若 $b_n \geq 0, \forall n$, 則 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ 或 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ 稱爲交錯級數 (alternating series)。

定理 9.7.2. (交錯級數審斂法, Leibniz 定理) 若一交錯級數 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n, b_n \geq 0$ 滿足以下兩條件, 則爲收斂。

(a) $\{b_n\}$ 爲下降數列。

(b) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$。

定理 9.7.3. (交錯級數估計定理) 若交錯級數 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n$ 滿足上定理的二條件, 且其值爲 L, 則以 s_n 爲估計值所造成的誤差 R_n 滿足 $|R_n| = |s_n - L| \leq b_{n+1}$。

例 9.7.4. 判斷下列級數的斂散:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{3n}{4n-1}$ 。

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+1}$ 。

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos n\pi}{2^n}$ 。

例 9.7.5. 若 n 爲奇數, $b_n = \frac{1}{n}$; 若 n 爲偶數, $b_n = \frac{1}{n^2}$ 。判斷級數 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$ 的斂散性 。

例 9.7.6. 以 s_8 估計 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2^n}$ 之和, 並估計其誤差。

例 9.7.7. 估計 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ 精確到小數第三位。

[**習題**] **9.7.8.** Test the series for convergence or divergence.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+4)}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^3+2}}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \tan^{-1} n$,

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos n\pi}{2^n}$,

(e) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

[**習題**] **9.7.9.** How many terms of the series $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{10^n n!}$ do we need to add in order to find the sum to to the accuracy < 0.000005?

9.8 絕對收斂與條件收斂 (Absolute Convergence and Conditional Convergence)

定義 9.8.1. 給定一級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (不一定是正項或交錯), 則

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收斂, 則稱 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 爲絕對收斂 (absolutely convergent)。

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂, 但非絕對收斂, 則稱 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 爲條件收斂 (conditionally convergent)。

定理 9.8.2. (絕對收斂審斂法) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收斂, 則 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂。

例 9.8.3. 判斷以下級數爲絕對收斂, 條件收斂或發散:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}, p > 0$ 。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(\ln n)^p}{n}$ 。

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{3^n}$ 。

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^{1.1}}$ 。

例 9.8.4. 令 b_n 爲正項數列, 且收斂到 $\frac{1}{2}$, 判斷級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n^n b_1 b_2 \cdots b_n}$ 的絕對收斂性 。

例 9.8.5. 若級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 爲條件收斂, 則級數 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n$ 爲發散。

綜合例題. 判斷下列級數爲絕對收斂、條件收斂或發散:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3n-5} - \frac{8}{6n+1}\right)$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}\right)$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{5^n n!}$

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tan\frac{1}{n}}{n}$

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2\sqrt{n}\sin^2\left(\frac{1}{n^2}\right)$

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\tan^{-1} n}{n\sqrt{n}}$

(10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\frac{n+1}{n}$

(11) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

(12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$

(13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$

(14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$

(15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^n}{n^{2n}}$

(16) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^{n^2}}$

(17) $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6^2}+\cdots$

(18) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

(19) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^2}}$

(20) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\log_n(n!)}{n^3}$

[習題] 9.8.6. Determine whether the series is absolutely convergent, conditionally convergence, or divergence.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+4}$,

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(2n+1)!}$,

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 4n}{4^n}$,

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3-\cos n}{n^{\frac{2}{3}}-2}$,

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\frac{n\pi}{3})}{n!}$,

(f) $1-\frac{1\cdot 3}{3!}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{5!}-\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{7!}+(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{(2n-1)!}+\cdots$,

9.9 冪級數(Power Series)

冪級數

定義 9.9.1. 形如 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ 之型式的級數稱爲 $x-a$ 的冪級數 (power series) 或以 a 爲中心 (center) 的冪級數, $c_0, c_1, c_2, \ldots$ 稱爲級數的係數。

例 9.9.2. (幾何級數) (1) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 。

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} (-\frac{1}{2})^n (x-2)^n$ 。

例 9.9.3. 以下各級數中，求出使其收斂的 x 值。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$ 。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n-1}$ 。

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 。

(4) $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ 。

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$ 。

註 9.9.4. 對於收斂之 x 值, 冪級數可以定義一個函數。

收斂區間

定理 9.9.5. (1) 若冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=c\neq 0$ 收斂，則它在所有 x, $x\in(-|c|,|c|)$, 處均絕對收斂 。

(2) 若它在 $x=d$ 發散，則它在所有 x，$|x|>|d|$, 處均發散 。

定理 9.9.6. $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x-a)^n$ 的收斂性可以有以下三種可能。

(a) 存在 R, 使得它在 $\{x:|x-a|>R\}$ 處發散, 在 $\{x:|x-a|<R\}$ 處絕對收斂 。但在端點 $x=a+R$ 及 $x=a-R$ 處不一定。

(b) 級數在所有 x 均爲絕對收斂 $(R=\infty)$。

(c) 級數只在 $x=a$ 收斂 $(R=0)$ 。

定義 9.9.7. 上一定理中的 R 稱爲收斂半徑 (radius of convergence) , 所有收斂的 x 值構成一個區間, 稱爲收斂區間 (interval of convergence)。在 (a) 中有四種可能性$(a-R,a+R)$、$[a-R,a+R]$、$(a-R,a+R]$ 或 $[a-R,a+R)$; 在 (b) 中爲 $\mathbb{R}$; 在 (c) 中, 收斂區間爲 $\{a\}$。這就是冪級數所定義之函數的定義域。

例 9.9.8. 求以下各冪級數的收斂區間:

(1) $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots$ 。

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$ 。

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$ 。

[習題] 9.9.9. Find the radius of convergence and interval of convergence of the series.

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n+1}$,

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^n x^n$,

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5^n n^5}$,

(d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-3)^n}{2n+1}$,

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-1)^n}{5^n\sqrt{n}}$,

(f) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{b^n}{\ln n}(x-a)^n$, $b>0$,

(g) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n(\ln n)^2}$,

(h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}$.

[習題] 9.9.10. If k is a positive integer, find the radius of convergence of the series $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^k}{(kn)!}x^n$.

9.10 冪級數的運算

加減

定理 9.10.1. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(x-a)^n$ 在 $(a-R, a+R)$ 上定義一個函數 $f(x)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n(x-a)^n$ 在 $(a-S, a+S)$ 上定義一個函數 $g(x)$, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_n+d_n)(x-a)^n$ 在兩定義域的交集部份定義函數 $(f+g)(x)$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_n-d_n)(x-a)^n$ 在兩定義域的交集部份定義函數 $(f-g)(x)$。

微積

定理 9.10.2. (逐項微分定理, Term-by-term Differentiation Theorem) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(x-a)^n$ 在 $(a-R, a+R), R>0$, 上收斂，則它在 $(a-R, a+R)$ 上定義一個函數 $f(x)$, 此函數可任意階微分, 且

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1} \text{ 。}$$

此一級數在 $(a-R, a+R)$ 上收斂 。

定理 9.10.3. (逐項積分定理) 令 $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ 在 $(a-R, a+R)$ 上收斂 。則 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$ 在 $(a-R, a+R)$ 上收斂，且

$$\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + C \text{ 。}$$

[註] 級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(x-a)^n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$ 與 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$ 之收斂半徑不變, 收斂區間可能會改變。

例 9.10.4. 冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ 在 $(-1,1)$ 上定義函數 $\frac{1}{1-x}$。求冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 所定義的函數。

例 9.10.5. 將函數 $f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots, x \in (-1,1)$, 具體寫出。

乘除

定理 9.10.6. 令 $A(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 及 $B(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 在 $|x| < R$ 處絕對收斂，且 $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$，則 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 在 $|x| < R$ 處收斂到 $A(x)B(x)$。即

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ 。}$$

此乘法稱爲 Cauchy Product。

註 9.10.7. 對冪級數可作長除法 (long division)。

例 9.10.8. 利用冪級數的乘除法, 求函數 $\frac{1}{(1-x)}$ 及 $\frac{1}{(1-x)^2}$, $|x| < 1$, 的冪級數。

9.11 函數的冪級數表現 (Representations of Functions as Power Series)

例 9.11.1. $f(x) = \frac{1}{1-x}$ 在區間 $(-1, 1)$ 上可表爲冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$, 求 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 的冪級數, 並求其收斂區間。

例 9.11.2. 將以下各函數表成冪級數, 並求收斂半徑。

(1) $\frac{1}{x+2}$ 。

(2) $\frac{x^3}{x+2}$ 。

(3) $\frac{1}{1-x^2}$ 。

(4) $\frac{1}{(1-x)^2}$ 。

(5) $\ln(1-x)$ 。

(6) $\ln(1+x)$ 。

(7) $f(x) = \tan^{-1} x$ 。

[習題] 9.11.3. Find a power series representation for the function and determine the interval of convergence.

(a) $f(x) = \frac{2}{3-x}$,

(b) $f(x) = \frac{x}{2x^2+1}$,

(c) $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$,

(d) $f(x) = \ln(5-x)$,

(e) $f(x) = x^2 \tan^{-1}(x^3)$,

(f) $f(x) = (\frac{x}{2-x})^3$,

(g) $f(x) = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}$.

9.12 Taylor 級數及 Taylor 多項式 (Taylor Series and Taylor Polynomials)

Taylor 級數及 Taylor 多項式

定理 9.12.1. 若 $f(x)$ 在 a 點有級數表現 (或級數展開 series expansion), 即

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n,$$

$|x-a| < R$, 則其係數 $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$。

定義 9.12.2. 若 $f(x)$ 在一個包含 a 之區間的內點上可以無限次微分，則 $f(x)$ 在 $x=a$ 的 Taylor 級數 (Taylor series generated by f at $x=a$) 是

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n 。$$

若 $a=0$，則稱爲 Maclaurin 級數。

定義 9.12.3. 令 $f(x)$ 在一個包含 a 之區間的內點上有 N 階導數，則對 $n, 1\le n\le N$，n 階的 Taylor 多項式 (Taylor polynomial of order n) 爲

$$P_n(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n 。$$

Taylor 定理

定理 9.12.4. (Taylor 定理.) 假設在包含 a 的開區間 I 上，$f(x)$ $n+1$ 次可微，則 $\forall x\in I$,

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x),$$

其中 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$，$c$ 介於 a 及 x 之間。

註 9.12.5. (1) Taylor 定理可記爲 $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$。$R_n(x)$ 稱爲 n 階餘項, 或以 $P_n(x)$ 估計 $f(x)$的 誤差項。

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0, \forall x\in I$，則稱 $f(x)$ 在 $x=a$ 的 Taylor 級數 收斂到 $f(x)$，並記爲 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ 。

定理 9.12.6. (1) 若存在正數 M，使得對所有 t 介於 x 及 a 之間, $|f^{(n+1)}(t)|\le M$，則 $|R_n(x)|\le M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$ 。

(2) 若 $f(x)$ 滿足 Taylor 定理之條件, 且滿足 (1) 之條件，則 Taylor 級數收斂到 $f(x)$。

典型例子

例 9.12.7. 求下列函數在 $x=0$ 之 Taylor 多項式及 Taylor 級數。並證明以下各函數在 $(-R,R)$ 上, Maclaurin 級數收斂到 $f(x)$, R 爲收斂半徑 。

(1) e^x

(2) $\cos x$

(3) $\sin x$

(4) $\frac{1}{1-x}$

註 9.12.8. 令 $f(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0\end{cases}$。則對所有 n, $f^{(n)}(0)=0$, 故在 $x=0$ 之 Taylor 級數爲 0。此級數在所有 x 值收斂, 但只在 $x=0$ 收斂到 $f(x)$。

例 9.12.9. 若 $f(x) = \sin(x^3)$, 求 $f^{(15)}(0)$。

例 9.12.10. 求出以下函數在 $x = 0$ 之 Taylor 級數 。

(1) $f(x) = \cos 2x$ 。

(2) $f(x) = \cos x^2$ 。

(3) $f(x) = \cos^2 x$ 。

(4) $f(x) = \cos(x-1)$ 。

(5) $f(x) = x^3 \sin x$ 。

(6) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{3}}$ 。

(7) $f(x) = \frac{\sin x^3}{x}$ 。

(8) $f(x) = \frac{1}{2x^2+x-6}$ 。

(9) $f(x) = \ln(6 - x - 2x^2)$ 。

(10) $f(x) = \begin{cases} \frac{x-\sin x}{x^3} & x \neq 0 \\ \frac{1}{6} & x = 0。\end{cases}$

例 9.12.11. 求出以下函數在 $x = 0$ 之 Taylor 級數的非零前三項 。

(1) $e^x \sin x$ 。

(2) $\tan x$ 。

二項級數

例 9.12.12. 求 $f(x) = (1+x)^k$ 的 Maclaurin 級數, 其中 $k \in \mathbb{R}$。

[註] 若 $k \in \mathbb{N}$, 則當 $n > k$ 時, $k(k-1)\cdots(k-n+1) = 0$, 故 $T(x)$ 只有有限次項, 它是個多項式。

定義 9.12.13. (1) 對 $m \in \mathbb{R}, k$ 爲正整數, 定義 $\binom{m}{0} = 1, \binom{m}{1} = m, \binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}$, 稱爲二項係數 (binomial coefficient)。。

(2) 對 $x \in (-1,1)$ 時 , 則二項級數 (binomial series) 爲 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \binom{m}{k} x^k$ 。

定理 9.12.14. 當 $x \in (-1,1)$ 時 , 二項級數收斂到 $(1+x)^m$, 即 $(1+x)^m = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \binom{m}{k} x^k, m \in \mathbb{R}$。

例 9.12.15. 利用二項級數 , 求以下各函數在 $x = 0$ 的 Taylor 級數。

(1) $(1+x)^{-1}$ 。

(2) $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ 。

(3) $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ 。

(4) $\sin^{-1} x$ 。

例 9.12.16. 求 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x}}$ 的 Maclaurin 級數及其收斂半徑。

例 9.12.17. (1) 求 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $x = 2$ 的 Taylor 級數。並求出 x 使其收斂到 $f(x)$。

(2) 求 e^x 在 $x = 2$ 的 Taylor 級數。

(3) 將 $f(x) = \sin x$ 寫成以 $\frac{\pi}{3}$ 爲中心的 Taylor 級數 。

(4) 求 $\sqrt{x}$ 在 $x = 4$ 的 Taylor 級數。

[習題] 9.12.18. Find the Maclaurin series for $f(x)$. Also find the associated radius of convergence.

(a) $f(x) = (1-x)^{-2}$,

(b) $f(x) = \cos 3x$,

(c) $f(x) = 2^x$,

(d) $f(x) = \sqrt[3]{8+x}$,

(e) $f(x) = e^x + 2e^{-x}$,

(f) $f(x) = x^2 \ln(1+x^3)$,

(g) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{2+x}}$,

(h) $f(x) = \sin^2 x$.

[習題] 9.12.19. Find the Taylor series for $f(x)$ centered at the given value of a.

(a) $f(x) = x - x^3, a = -2$.

(b) $f(x) = \ln x, a = 2$.

(c) $f(x) = \sin x, a = \frac{\pi}{2}$.

(d) $f(x) = \sqrt{x}, a = 16$.

[習題] 9.12.20. Find the first three nonzero terms in the Maclaurin series for the function

(a) $y = \frac{x}{sinx}$,

(b) $y = e^x \ln(1+x)$.

[習題] 9.12.21. Find the Taylor polynomial $T_3(x)$ for the function f centered at the number a.

(a) $f(x) = \cos x, a = \frac{\pi}{2}$.

(b) $f(x) = \tan^{-1} x, a = 1$.

9.13 冪級數之應用(Applications of Power Series)

估計誤差

例 9.13.1. 利用級數求 e 之値, 使其誤差 $< \frac{1}{10^6}$ 。

例 9.13.2. (a) 利用在 $a = 8$ 的二次 Taylor 多項式估計 $f(x) = \sqrt[3]{x}$。

(b) 求 $7 \leq x \leq 9$ 時的誤差。

求和

例 9.13.3. (a) 求 $\tan^{-1} x$ 之 Maclaurin 級數。

(b) 證明在 $|x| \leq 1$ 時 , $\tan^{-1} x$ 等於其 Taylor 級數 。

(c) 導出 Leibniz 公式: $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)} + \cdots$ 。

(d) 利用 $\frac{\pi}{4} = \tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3}$ 估計 π 。

[註]

(1) $\pi = 48 \tan^{-1} \frac{1}{18} + 32 \tan^{-1} \frac{1}{57} - 20 \tan^{-1} \frac{1}{239}$ 。

(2) 在 π 的小數表法上, 目前已知的記錄是, 2016 年 Peter Trueb (瑞士人) 使用余智恆 (Alexander J. Yee, 華裔) 的程式計算的 22,459,157,718,361 位。

例 9.13.4. (1) 求級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nx^n$ 之和。

(2) 求級數 $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \cdots$ 之和。

(3) 求級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ 之和。

估計積分值

例 9.13.5. (a) 將 $\int \frac{1}{1+x^7} dx$ 寫成級數。

(b) 估計 $\int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^7} dx$ 精確到 10^{-7}。

例 9.13.6. (a) 將 $\int_0^1 \sin x^2 dx$ 表爲冪級數。

(b) 估計 $\int_0^1 \sin x^2 dx$ 使誤差 $< \frac{1}{10^3}$ 。

例 9.13.7. (a) 求 $\int e^{-x^2} dx$ 的級數表示。

(b) 求 $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ 精確到 0.001 。

求極限

例 9.13.8. 利用冪級數求下列極限。

(1) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1}$ 。

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}$ 。

(3) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2})$ 。

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$ 。

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^{2x}-1)\ln(1+x^3)}{(1-\cos 3x)^2}$ 。

Euler公式

定義 9.13.9. 對任意 $\theta\in\mathbb{R}$, 定義 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 。

註 9.13.10. (1) Euler 公式 $e^{i\pi}=-1$ 。

(2) 若 $\alpha\in\mathbb{C}$, 則可驗證 $\int e^{\alpha x}dx=\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}+C$ 仍然成立。

例 9.13.11. 求 $\int e^{ax}\cos bx dx$ 。

[習題] 9.13.12. How many terms of the Maclaurin series for $\ln(1+x)$ do you need to use to estimate $\ln 1.4$ to within 0.001?

[習題] 9.13.13. Use a power series to approximate the definite integral to six decimal places.

(a) $\int_0^{0.4}\ln(1+x^4)dx$,

(b) $\int_0^{0.1}x\tan^{-1}(3x)dx$.

[習題] 9.13.14. Find the sum of the series.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$,

(b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^n$, $|x|<1$.

[習題] 9.13.15. Find the sum of the series.

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n}}{6^{2n}(2n)!}$,

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^n}{n5^n}$,

(c) $3+\frac{9}{2!}+\frac{27}{3!}+\frac{81}{4!}+\cdots$.

[習題] 9.13.16. Use series to evaluate the limit.

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x+\frac{1}{6}x^3}{x^5}$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}$.