

第 2 章

極限 (Limits)

目錄

2.1	極限的直觀	15
2.2	單側, 在無限遠之極限及無窮極限	16
2.3	極限的定義	17
2.4	極限的性質	18
2.5	漸近線	22
2.6	連續性	23
2.7	中間值定理	25

2.1 極限的直觀

變化率

定義 2.1.1. $y = f(x)$ 在 $x \in [x_1, x_2]$ 上的平均變化率(average rate of change) 為 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1+h) - f(x_1)}{h}$, $h = x_2 - x_1$ 。

例 2.1.2. 一顆球從 450 公尺高的 CN 塔上放下,

- (1) 求它在前 5 秒的平均速度。
- (2) 求它在第 5 秒到第 6 秒間的平均速度。
- (3) 求它在第 5 秒的速度。

例 2.1.3. 討論拋物線 $y = x^2$ 在點 $P(1, 1)$ 之切線的斜率。

極限的直觀

例 2.1.4. (1) 討論 $f(x) = \frac{3x+4}{x+5}$ 在 $x = -2$ 附近的行爲。

(2) Heaviside 函數定義為 $H(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0; \\ 1 & \text{if } t \geq 0, \end{cases}$ 討論在 $t = 0$ 附近的行爲。

(3) 令

(a) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$,

$$(b) g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & x \neq 1 \\ 1 & x = 1, \end{cases}$$

$$(c) h(x) = x + 1.$$

討論以上三函數在 $x = 1$ 附近的行爲。

[註] 函數在 a 的極限與它在 a 的取值無關。

定義 2.1.5. (直觀) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ 表示: 當 x 很靠近 a 時, $f(x)$ 很靠近 L ; 而且要多接近, 就有多接近。我們稱 $f(x)$ 在 $x = a$ 的極限 (limit) 爲 L 。

[註] x 很靠近 a 表示 x 同時從左側及右側很靠近 a , 且 $x \neq a$ 。

例 2.1.6. 討論在 $x = 0$ 的極限:

$$(a) f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1 & x \geq 0, \end{cases}$$

$$(b) g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

$$(c) h(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ \sin \frac{1}{x} & x > 0. \end{cases}$$

[習題] **2.1.7.** If a rock is thrown upward on the planet Mars with a velocity of 10 m/s, its height in meters t seconds later is given by $y = 10t - 1.86t^2$.

(a) Find the average velocity over the given finite intervals.

(i) $[1, 2]$, (ii) $[1, 1.5]$, (iii) $[1, 1.1]$, (iv) $[1, 1.01]$, (v) $[1, 1.001]$.

(b) Estimate the instantaneous velocity when $t = 1$.

2.2 單側, 在無限遠之極限及無窮極限

(一) 單側極限 (One-Sided Limits)

例 2.2.1. (1) $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x-4} & \text{if } x > 4; \\ 8-2x & \text{if } x < 4, \end{cases}$ 求 $\lim_{x \rightarrow 4} g(x)$ 。

(2) 令 $f(x) = \sqrt{4-x^2}$, 求 $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ 及 $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ 。

例 2.2.2. 求極限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} |x|,$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x},$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 3^+} [x], \lim_{x \rightarrow 3^-} [x], \lim_{x \rightarrow \pi} [x].$$

定理 2.2.3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ 且 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ 。

例 2.2.4. $\lim_{x \rightarrow n} [x - [x - 1]], n \in \mathbb{Z}$.

(二) 無窮極限 (Infinite Limits)

例 2.2.5. 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ 。

例 2.2.6. 求 $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-3}{x^2-4}$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-3}{x^2-4}$, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{x^2-4}$ 。

例 2.2.7. 求 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{x^2-4}$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{x^2-4}$ 。

例 2.2.8. 求 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x$, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x$ 。

例 2.2.9. 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x$ 。

(三) 在無限遠的極限 (Limits at infinite)

例 2.2.10. 討論 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2$, $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3$ 。

例 2.2.11. 描繪函數 $y = (x-2)^4(x+1)^3(x-1)$ 的圖形。

例 2.2.12. 求極限: $\lim_{x \rightarrow \infty} \tan^{-1} x$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \tan^{-1} x$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} \arctan\left(\frac{1}{x-2}\right)$ 。

例 2.2.13. 求極限: $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$ 。

[習題] 2.2.14. Determine the values of a for which $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ exists.

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & x < -1 \\ x^2 & -1 \leq x < 1 \\ 2-x & x \geq 1. \end{cases}$$

[習題] 2.2.15. Sketch the graph of an example of a function f that satisfies the conditions $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 0$, $f(0) = 2$, $f(4) = 1$.

[習題] 2.2.16. Sketch the graph of an example of a function f that satisfies the conditions. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 4$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3$, $f(0) = 3$.

2.3 極限的定義 (Definitions of Limit)

定義 2.3.1. 令 $f(x)$ 在包含 $x = a$ 的某一開區間上有定義。若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得 $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$, 則稱爲 $f(x)$ 在 x 趨近於 a 時的極限爲 L , 記爲 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ 。

例 2.3.2. 證明 $\lim_{x \rightarrow 3} (4x - 5) = 7$ 。

定義 2.3.3. (1) $\forall \varepsilon > 0, \exists M$ 使得 $x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$, 則稱 x 趨近 ∞ 時, $f(x)$ 的極限爲 L , 記爲 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ 。

(2) $\forall \varepsilon > 0, \exists M$ 使得 $x < M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$, 則稱 x 趨近 $-\infty$ 時, $f(x)$ 的極限爲 L , 記爲 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ 。

例 2.3.4. 證明 (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$, (b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ 。

定義 2.3.5. (1) 若 $\forall B > 0$, 則 $\exists \delta > 0$, 使得 $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > B$, 稱為在 x 趨近 a 時, $f(x)$ 的極限為無限大, 記為 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ 。

(2) 若 $\forall B < 0$, 則 $\exists \delta > 0$, 使得 $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < B$, 稱為在 x 趨近 a 時, $f(x)$ 的極限為負無限大, 記為 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ 。

例 2.3.6. 證明 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ 。

2.4 極限的性質

四則運算的極限

定理 2.4.1. 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ 且 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, 則

- (1) $\lim_{x \rightarrow a} c = c, \lim_{x \rightarrow a} x = a$,
- (2) $\lim_{x \rightarrow a} kf(x) = kL$,
- (3) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = L \pm M$,
- (4) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = L \cdot M$,
- (5) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$, 若 $M \neq 0$,
- (6) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^\alpha = L^\alpha, \alpha \in \mathbb{Q}, L > 0$ 。

[註] 只要極限值 L, M 存在, 此定理對 ”單側極限” 及 ”在無限遠的極限” 均成立。

例 2.4.2. (1) 若 $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, 則 $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a)$ 。

(2) 若 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 為有理式, 且 $Q(a) \neq 0$, 則 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$ 。

例 2.4.3. 求 $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{\frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}}$ 。

例 2.4.4. 求極限:

- (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 8x - 3}{3x^2 + 2}, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2 + 8x - 3}{3x^2 + 2}$ 。
- (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{11x + 1}{2x^3 - 1}, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{11x + 1}{2x^3 - 1}$ 。
- (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$ 。
- (4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$ 。

三明治定理

定理 2.4.5. (1) 令 $c \in (a, b)$ 。若 $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b], x \neq c$, 且以下極限均存在, 則 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow c} g(x)$ 。

(2) [三明治定理, 夾擊定理 (Sandwich Theorem, Squeeze Theorem)] 若 $g(x) \leq f(x) \leq h(x), \forall x \in [a, b], x \neq c$, 且 $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = L$, 則 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ 。

定理 2.4.6. 若 $f(x)$ 在 $x = a$ 附近為有界, 且 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, 則 $\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = 0$ 。

例 2.4.7. (1) 若 $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$, 則 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ 。

(2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |L|$ 是否成立?

例 2.4.8. $\lim_{\theta \rightarrow 0} \sin \theta, \lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \theta$ 。

例 2.4.9. 求極限:

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$,

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x}$,

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$ 。

三角函數的極限

定理 2.4.10. $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ (θ 取弧度)。

例 2.4.11. 求 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin 2\theta}{3\theta}$ 。

例 2.4.12. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot x$ 。

例 2.4.13. 求極限:

(1) $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(\theta-1)}{\theta-1}$,

(2) $\lim_{\theta \rightarrow 1} \frac{\sin(\theta-1)}{\theta-1}$,

(3) $\lim_{\theta \rightarrow 1} \frac{\sin(\theta-1)^2}{\theta-1}$ 。

例 2.4.14. 求極限:

(1) $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos \theta - 1}{\theta}$,

(2) $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos \theta - 1}{\theta^2}$ 。

例 2.4.15. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \tan x \sin \frac{1}{x}$ 。

例 2.4.16. 求極限:

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi}{2}x$,

$$(2) \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sec \theta - \tan \theta}{\theta - \frac{\pi}{2}}.$$

[習題] 2.4.17. Find the limit.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 6x},$$

$$(b) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan 6t}{\sin 2t},$$

$$(c) \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta + \tan \theta},$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{\sin x - \cos x},$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2 + x - 2}.$$

綜合例題

例 2.4.18. 求極限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \left\{ \frac{1}{x+3} - \frac{2}{3x+5} \right\},$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 27} \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}-2}{x-27},$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}.$$

例 2.4.19. 求極限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x),$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^4} - \sqrt[3]{1-2x^4}}{x(1-\cos x) \tan(\sin x)},$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}).$$

例 2.4.20. (1) 求 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[146]{|x|}}{\sqrt[7]{10^7 + \sqrt[3]{10^3 + \sqrt{x+10^7}}}}$ 。

(2) 令 $f(x) = \frac{\sqrt{9x^2+1}}{x+4}$ 。
求 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 及 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 。

例 2.4.21. 令 $f(x) = \frac{|x|-x}{|x|-x^3}$ 。

求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ 。

例 2.4.22. (1) 令 $f(x) = (3^x + 4^x + 5^x)^{\frac{1}{x}}$ 。

求 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ 。

(2) 令 $f(x) = \frac{3^{\frac{1}{x}} - 3^{-\frac{1}{x}}}{3^{\frac{1}{x}} + 3^{-\frac{1}{x}}}$ 。

求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 。

例 2.4.23. (a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} [x + [x + [x]]]$,

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} [x + [x + [x]]]$ 。

例 2.4.24. 令 $f(x) = \frac{|x|}{x}$ 。

求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ 。

例 2.4.25. 令 $f(x) = \frac{|x^2| - |x|^2}{x^2 - 1}$ 。

求 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 。

例 2.4.26. (1) 假設 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+b}-2}{x} = 1$, 求 a, b 之值。

(2) 假設 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (ax - \sqrt{4x^2 + bx + 1}) = 3$, 求 a, b 之值。

[習題] 2.4.27. Determine the limit.

(a) $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{e^x}{(x-5)^3}$,

(b) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \ln(x^2 - 9)$,

(c) $\lim_{x \rightarrow 2\pi^-} x \csc x$,

(d) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 5x + 6}$ 。

[習題] 2.4.28. Determine the limit.

(a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x - 3}$,

(b) $\lim_{u \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4u+1}-3}{u-2}$,

(c) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+t} - \sqrt{1-t}}{t}$,

(d) $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t\sqrt{1+t}} - \frac{1}{t} \right)$,

(e) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h}$,

(f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right)$,

(g) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1}$,

(h) $\lim_{x \rightarrow 2} ([x] + [-x])$ 。

[習題] 2.4.29. Let $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{|x - 2|}$ 。

(a) Find (i) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, (ii) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ 。

(b) Does $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ exist?

[習題] 2.4.30. Is there a number a such that $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2+ax+a+3}{x^2+x-2}$ exists? If so, find a and the value of the limit.

[習題] 2.4.31. Find the limit, if it exists.

(a) $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t-t\sqrt{t}}{2t^2+3t-5}$,

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^6-x}}{x^3+1}$,

(c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6-x}}{x^3+1}$,

(d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + 2x})$,

(e) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx})$,

(f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{e^{3x} + e^{-3x}}$,

(g) $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-2x} \cos x)$,

(h) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan^{-1}(\ln x)$.

2.5 漸近線(Asympotes)

定義 2.5.1. (1) 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ 或 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$, 則 $y = b$ 稱為 $y = f(x)$ 之水平漸近線。

(2) 若 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ 或 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$, 則 $x = a$ 稱為 $y = f(x)$ 之垂直漸近線。

(3) 若 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |f(x) - (mx + b)| = 0$, 則 $y = mx + b$ 稱為 $y = f(x)$ 的斜漸近線 (Oblique Asymptote)。

註 2.5.2. 斜漸近線之求法: 先求 $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, 若 m 存在, 且 $m \neq 0$, 再求 $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx)$ 。

例 2.5.3. 求以下函數的漸近線:

(1) $y = \frac{3x^2-x-2}{5x^2+4x+1}$,

(2) $y = \frac{x^2-3}{2x-4}$,

(3) $f(x) = \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$ 。

例 2.5.4. 求以下函數的漸近線:

(1) $f(x) = \sin \frac{1}{x} + 2$.

(2) $y = 2 + \frac{\sin x}{x}$ 。

[註] 漸近線可能與曲線交無限多個點。

例 2.5.5. 討論 $y = \tan x$ 及 $y = \sec x$ 的漸近線。

例 2.5.6. 求 $y = e^x$ 及 $y = \ln x$ 的漸近線。

[習題] 2.5.7. Find all asymptotes of $y = \frac{x^2+1}{3x-2x^2}$.

[習題] 2.5.8. Find all the asymptotes of each curves.

(a) $y = \frac{1+x^4}{x^2-x^4}$,

(b) $y = \frac{x^3-x}{x^2-6x+5}$,

(c) $y = \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$.

2.6 連續性(continuity)

定義

定義 2.6.1. 若 $y = f(x)$ 滿足以下三條件: (i) $f(a)$ 有定義。 (ii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在。 (iii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, 則稱 $f(x)$ 在點 a 連續。

註 2.6.2. (1) $f(x)$ 在 $x = a$ 連續, 若且唯若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow a} x)$ 。

(2) “連續”是局部性概念。

註 2.6.3. 不連續有以下幾類, 如圖

- (1) 可除性不連續 (removable discontinuity), 可重新定義 $f(x)$ 在不連續點之值, 以去除此點之不連續性,
- (2) 跳動性不連續 (jump discontinuity),
- (3) 無限不連續 (infinite discontinuity),
- (4) 振盪不連續 (oscilating discontinuity)。

例 2.6.4. 以下函數在哪些點不連續?

(1) $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x-2}$,

(2) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{if } x \neq 0; \\ 1 & \text{if } x = 0, \end{cases}$

(3) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x-2} & \text{if } x \neq 2; \\ 1 & \text{if } x = 2, \end{cases}$

(4) $f(x) = [x]$ 。

定義 2.6.5. (1) 若 $f(x)$ 在一區間 I 在每一點連續, 則稱它在 I 上連續。

(2) 若 $f(x)$ 在其定義域上每一點連續, 則稱其為連續函數 (continuous function)。

五則運算的連續性

定理 2.6.6. (1) 若 f 及 g 在 $x = a$ 連續, 則 $f + g, f - g, f \cdot g, kf, f^\alpha, \frac{f}{g}$ (若 $g(a) \neq 0$) 均在 $x = a$ 連續。

(2) 若 f 在 $x = a$ 且 g 在 $f(a)$ 連續, 則 $g \circ f$ 在 $x = a$ 連續。

定理 2.6.7. 若 $g(x)$ 在 $x = b$ 連續且 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, 則 $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(\lim_{x \rightarrow a} f(x)) = g(b)$ 。

定理 2.6.8. (1) 多項式函數, 有理函數, 冪次函數均為連續函數。

(2) 三角函數, 反三角函數均為連續函數。

(3) 指數函數, 對數函數均為連續函數。

例題

例 2.6.9. 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \sin^{-1}\left(\frac{1-x}{1-x^2}\right)$ 。

例 2.6.10. 若 $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{if } x < a; \\ x^2 & \text{if } x \geq a, \end{cases}$ 求 a 使其連續。

例 2.6.11. 令 $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q}; \\ 0 & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$ 則 $f(x)$ 在每一點都不連續。

例 2.6.12. 令 $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q}; \\ x^3 & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$ $f(x)$ 在哪些點連續?

例 2.6.13. 求 c 之值使得 $f(x)$ 成爲連續函數, 其中

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 + 2x & \text{若 } x < 2, \\ x^3 - cx & \text{若 } 2 \leq x. \end{cases}$$

例 2.6.14. 令 $f(x) = [x] + [-x]$ 。

(a) 對哪些 a , $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在?

(b) 在哪些點 $f(x)$ 不連續?

[習題] **2.6.15.** Find the numbers at which $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & 1 < x < 3 \\ \sqrt{x-3} & x \geq 3, \end{cases}$ is discontinuous.

[習題] **2.6.16.** Find the values of a and b that make $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 & 2 \leq x < 3 \\ 2x - a + b & x \geq 3, \end{cases}$ continuous everywhere.

[習題] **2.6.17.** Which of the following functions f has a removable discontinuities at a ?

(a) $f(x) = \frac{x^4-1}{x-1}$, $a = 1$;

(b) $f(x) = \frac{x^3-x^2-2x}{x-2}$, $a = 2$;

(c) $f(x) = [\sin x]$, $a = \pi$.

2.7 中間值定理 (Intermediate Value Theorem)

定理 2.7.1. (中間值定理) 若 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上連續, 則對 $f(a)$ 及 $f(b)$ 間每一數均可取值。即對任意介於 $f(a)$ 及 $f(b)$ 之間的 d , 皆存在 $c \in [a, b]$, 使得 $f(c) = d$ 。

推論 2.7.2. (勘根定理) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上連續, 且 $f(a)$ 及 $f(b)$ 異號, 則存在 $c \in (a, b)$, 使得 $f(c) = 0$ 。

註. (1) 對不連續函數, 中間值定理不見得成立。

例: 令 $f(x) = \begin{cases} x+2 & -1 < x \leq 1, \\ x & -2 \leq x \leq -1. \end{cases}$ 此時 $f(-2) < 0$, $f(1) > 0$, 但 $f(x) = 0$ 無解。

(2) 中間值定理只保證根的存在, 根的數目甚至可能有無限多。

例: 令 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$ 在 $[-\frac{2}{3\pi}, \frac{2}{\pi}]$ 上有無限多個 x , 滿足 $f(x) = 0$ 。

例 2.7.3. 證明方程式 $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$ 在 1, 2 之間有解。

例 2.7.4. 奇數次多項式方程式必有實根。

例 2.7.5. 證明曲線 $y = x^3$ 與 $y = 3x + 1$ 必相交。

例 2.7.6. (固定點定理) 令 $f(x)$ 為 $[0, 1]$ 對應到 $[0, 1]$ 的連續函數, 則必存在 $c \in [0, 1]$, 使得 $f(c) = c$ 。

例 2.7.7. 平面上有界區域 K , 若其中任兩點的連線段仍在 K 中, 則稱為凸集合 (convex set)。現平面上有一直線 L 及一凸集合 K , 證明必存在一條與 L 平行之直線將 K 的面積二等分。

[習題] **2.7.8.** Show that there is a root of the equation $\sin x = x^2 - x$ in the interval $(1, 2)$

[習題] **2.7.9.** A Tibetan monk leaves the monastery at 7:00 AM and takes his usual path to the top of the mountain, arriving at 7:00 PM. The following morning, he starts at 7:00 AM at the top and takes the same path back, arriving at the monastery at 7:00 PM. Show that there is a point on the path that the monk will cross at exactly the same time of day on both days.