第 17 章

二階微分方程 (Second-Order Differential Equations)

目錄

17.1 齊次線性微分方程 **210**

17.2 非齊次線性微分方程 **211**

17.1 齊次線性微分方程 (Homogeneous Linear Differential Equations)

定義 17.1.1. (1) 形如 $P(x)\frac{d^2y}{dx^2}+Q(x)\frac{dy}{dx}+R(x)y=G(x)$ 之微分方程稱爲二階線性微分方程 (second-order linear differential equation), 其中要求 $P(x)$、$Q(x)$ 和 $R(x)$ 均爲連續函數。

(2) 若 $G(x)\equiv 0$, 則此微分方程稱爲齊次(homogeneous)。

定理 17.1.2. 若 y_1 及 y_2 是一齊次線性微分方程 $P(x)\frac{d^2y}{dx^2}+Q(x)\frac{dy}{dx}+R(x)y=0$ 之解, c_1 及 c_2 是任意兩常數, 則線性組合 $c_1y_1+c_2y_2$ 仍爲其解。

定義 17.1.3. 若兩函數 y_1 及 y_2, 任一個均不爲另一個函數之常數倍, 則稱他們是線性獨立的 (linearly independent)。

定理 17.1.4. 若 y_1 及 y_2 爲齊次線性微分方程 $P(x)\frac{d^2y}{dx^2}+Q(x)\frac{dy}{dx}+R(x)y=0$ 之解, 且它們是線性獨立的, 則此微分方程之通解 (general solutions) 爲 $y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$。

定理 17.1.5. 考慮二階常係數齊次線性微分方程 $ay''+by'+cy=0, a\neq 0$, 方程式 $ar^2+br+c=0$ 稱爲其特徵方程式或 輔助方程(characteristic equation or auxiliary equation)。

(1) 若 $b^2-4ac>0$, r_1 及 r_2 爲特徵方程之兩相異實根, 則微方的通解爲 $y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}$。

(2) 若 $b^2-4ac=0$, r 爲特徵方程之根, 則微方的通解爲 $y=c_1e^{rx}+c_2xe^{rx}$。

(3) 若 $b^2-4ac<0$, $r_1=\alpha+i\beta$ 及 $r_2=\alpha-i\beta$ 爲特徵方程之複數根, 則微方的通解爲 $y=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$。

例 17.1.6. 解 $y''+y'-6y=0$。

例 17.1.7. 解 $3\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-y=0$。

例 17.1.8. 解 $4y'' + 12y' + 9y = 0$。

例 17.1.9. 解 $y'' - 6y' + 13y = 0$。

初始值問題 (Initial-value problems)

例 17.1.10. 解 $y'' + y' - 6y = 0$、$y(0) = 1$、$y'(0) = 0$。

例 17.1.11. 解 $y'' + y' = 0$、$y(0) = 2$、$y'(0) = 3$。

邊界值問題 (Boundary-value problems)

例 17.1.12. 解 $y'' + 2y' + y = 0$、$y(0) = 1$、$y(1) = 3$。

17.2 非齊次線性微分方程 (Nonhomogeneous Linear Differential Equations)

定理 17.2.1. 考慮微分方程 $ay'' + by' + cy = G(x)$, 其特解 (particular solution) 爲 $y_p(x)$。微分方程 $ay'' + by' + cy = 0$ 稱爲 complementary 方程, 其通解爲 $y_c(x)$。則原微分方程之通解爲 $y(x) = y_p(x) + y_c(x)$。

未定係數法 (Method of indetermined coefficients)

例 17.2.2. 解 $y'' + y' - 2y = x^2$。

例 17.2.3. 解 $y'' + 4y = e^{3x}$。

例 17.2.4. 解 $y'' + y' - 2y = \sin x$。

例 17.2.5. 解 $y'' + 2y' + 4y = x\cos 3x$。

例 17.2.6. 解 $y'' - 4y = xe^x + \cos 2x$。

例 17.2.7. 解 $y'' + y = \sin x$。

例 17.2.8. 解 $y'' - 4y' + 13y = e^{2x}\cos 3x$。

參數變動法 (Method of variation of parameters)
令 $ay''+by'+cy = 0$ 之解爲 $y = c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ 。我們假設 $ay''+by'+cy = G(x)$ 之特解爲 $y_p(x) = u_1(x)\,y_1(x)+u_2(x)\,y_2(x)$。在假設 $u_1'y_1+u_2'y_2 = 0$ 之下, 我們可得 $a(u_1'y_1' + u_2'y_2') = G$。由此可解 u_1', u_2', 因此得 $u_1(x)$ 及 $u_2(x)$。

例 17.2.9. 解 $y'' + y = \tan x$、$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$。

例 17.2.10. 解 $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^3}$。