第 15 章

重積分 (Multiple Integrals)

目錄

15.1 矩形上的雙重積分 **176**

15.2 累次積分 **178**

15.3 有界非矩形區域上的雙重積分 **178**

15.4 在極座標下的重積分 **180**

15.5 雙重積分的應用 **182**

15.6 曲面之表面積 **184**

15.7 直角座標系下的三重積分 **185**

15.8 三重積分之應用 **186**

15.9 柱面座標與球面座標上的三重積分 **187**

15.10 重積分的變數變換 **190**

15.1 矩形上的雙重積分 (Double Integrals over Rectangles)

定義

15.1.1. 目標. 令 $R=[a,b]\times[c,d]=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x\le b, c\le y\le d\}$, $z=f(x,y)$ 爲定義在 R 上的連續函數, 且在 R 上 $f(x,y)\ge 0$。令 S 爲在 R 之上, 且在 f 之圖形下的立體區域, 即 $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\le z\le f(x,y),(x,y)\in R\}$。欲求 S 的體積。

定義 15.1.2. (1) (a) 將 $[a,b]$ 等分爲 m 個子區間, 分點爲 $a=x_0$, x_1,$\cdots$, x_{m-1}, $x_m=b$, 將 $[c,d]$ 等分爲 n 個子區間, 分點爲 $c=y_0$, y_1, $\cdots$, y_{n-1}, $y_n=d$。如此得到 mn 個子矩形 $R_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$, 子矩形面積爲 $\triangle A=\triangle x\triangle y=\frac{b-a}{m}\frac{d-c}{n}$。

(b) 在 R_{ij} 中選一個樣本點 (sample point) $\left(x_{ij}^*,y_{ij}^*\right)$, 得一以 $f\left(x_{ij}^*,y_{ij}^*\right)$ 爲高的立方體, 其體積爲 $f\left(x_{ij}^*,y_{ij}^*\right)\triangle A$。

(c) 如此得 S 之體積的估計值 $V\approx\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} f\left(x_{ij}^*,y_{ij}^*\right)\triangle A$。

(d) 定義 $V=\lim\limits_{m,n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} f\left(x_{ij}^*,y_{ij}^*\right)\triangle A$ 爲 S 的體積。

(2) 令 f 爲定義在 R 上的函數, 如同 (1)(a),(b) 之符號。考慮極限 $\lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\left(x_{ij}^*, y_{ij}^*\right)\triangle A$。若此極限存在, 則稱 $f(x,y)$ 在 R 上可積分 (integrable)。此極限稱爲 f 在 R 上的雙重積分 (double integral), 記爲 $\iint_R f(x,y)dA$, $\iint_R f(x,y)dxdy$ 或 $\iint_R f(x,y)dydx$ 。

[註]

(1) $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\left(x_{ij}^*, y_{ij}^*\right)\triangle A$ 稱爲一個 Riemann 和。

(2) 若 $f(x,y)\ge 0$ 且爲連續, 則在 R 上, 且在 $z=f(x,y)$ 之下的體積爲 $V=\iint_R f(x,y)\,dA$。

(3) 重積分的嚴謹定義爲:$\forall\,\epsilon>0$, $\exists N$ 使得對所有 $m,n>N$, 對任意選取的 $\left(x_{ij}^*, y_{ij}^*\right)\in R_{ij}$ 均有 $\left|\iint_R f(x,y)\,dA-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\left(x_{ij}^*, y_{ij}^*\right)\triangle A\right|<\epsilon$。

定理 15.1.3. 若 f 在 R 上有界, 且除了 R 中有限個平滑曲線外, f 在 R 上均爲連續, 則 f 在 R 上可積分。

例 15.1.4. 若 $R=\{(x,y)|-1\le x\le 1,-2\le y\le 2\}$, 求積分 $\iint_R \sqrt{1-x^2}dA$ 之值。

估計

例 15.1.5. (1) 估計 $z=16-x^2-2y^2$ 在 $R=[0,2]\times[0,2]$ 上的體積。(取 $n=m=2$, 並取右上方的點爲樣本點。)

(2) 令 R 爲 xy-平面上的矩形 $0\le x\le 2, 0\le y\le 1$, 估計位於 R 之上, 且在平面 $z=4-x-y$ 之下的立體之體積。

15.1.6. 中點法 $\iint_R f(x,y)\,dA \approx \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\bar{x}_i,\bar{y}_j)\triangle A$ 其中 $\bar{x}_i$ 爲 $[x_{i-1},x_i]$ 的中點, $\bar{y_j}$ 爲 $[y_{j-1},y_j]$ 的中點。

例 15.1.7. 利用中點法估計 $\iint_R (x-3y^2)\,dA$, 其中 $R=[0,2]\times[1,2]$。

例 15.1.8. 利用下圖, 下雪量的等高線圖, 估計總下雪量。

性質

性質 15.1.9. (1) $\iint_R [f(x,y)+g(x,y)]\,dA=\iint_R f(x,y)\,dA+\iint_R g(x,y)\,dA$。

(2) $\iint_R cf(x,y)\,dA=c\iint_R f(x,y)\,dA$。

(3) 若 $\forall\,(x,y)\in R$, $f(x,y)\ge g(x,y)$, 則 $\iint_R f(x,y)\,dA\ge\iint_R g(x,y)\,dA$。

例 15.1.10. 證明: $0\le\iint_R \sin\pi x\cos\pi y\,dA\le\frac{1}{32}$, 此處 $R=[0,\frac{1}{4}]\times[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$。

例 15.1.11. 求 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n^2}\frac{1}{n^2}\frac{1}{\sqrt{n^2+ni+j}}$。

15.2 累次積分(Iterated Integrals)

定義 15.2.1. 累次積分 (iterated integral) 爲

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dydx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx,$$

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy。$$

例 15.2.2. 求 $\int_0^3 \int_0^2 x^2y\ dydx$ 及 $\int_0^2 \int_0^3 x^2y\ dxdy$。

定理 15.2.3 (Fubini 定理初步型式)**.** 若 $f(x,y)$ 在矩形 $R: a \le x \le b, c \le y \le d$ 上有界, 且至多只在有限個平滑曲線上不連續，並且累次積分存在, 則

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dxdy\ 。$$

例 15.2.4. (1) 令 $R = [0,2] \times [1,2]$, 求 $\iint_R (x - 3y^2)\,dA$。

(2) 令 $R = [1,2] \times [0,\pi]$, 求 $\iint_R y \sin(xy)\,dA$。

例 15.2.5. 一立體由 $x^2 + 2y^2 + z = 16$、$x = 2$、$y = 2$ 及座標面所圍成, 求其體積。

註 15.2.6. 若 $R = [a,b] \times [c,d]$, 則 $\iint_R g(x)\,h(y)\,dA = \int_a^b g(x)\,dx \cdot \int_c^d h(y)\,dy$。

例 15.2.7. 令 $R = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 求 $\iint_R \sin x \cos y\ dA$。

例 15.2.8. 令 $R = [-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi]$, 求 $\iint_R (1 + x^2 \sin y + y^2 \sin x)\,dA$。

例 15.2.9. 若 $f(x,y)$ 在 $[a,b] \times [c,d]$ 連續, 且 $g(x,y) = \int_a^x \int_c^y f(s,t)\,dt\,ds$, $a < x < b, c < y < d$, 求 g_{xy}。

例 15.2.10. 求 $\iint_R \lfloor x + y \rfloor dA$, 其中 $R = \{(x,y) | 1 \le x \le 3, 2 \le y \le 5\}$。

例 15.2.11. (Fubini 定理的反例) 求 $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dydx$ 及 $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dxdy$。

15.3 有界非矩形區域上的雙重積分(Double Integrals over General Regions)

Fubini 定理

定義 15.3.1. 若 D 爲 $\mathbb{R}^2$ 上有界集, $f(x,y)$ 爲定義在 D 上的函數, 取一矩形 R 包含 D, 令

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \in R \setminus D, \end{cases}$$

則定義 f 在 D 上的重積分爲 $\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_R F(x,y)\,dA$。

例 15.3.2. (1) 求 $\iint_{x^2+y^2 \le 1} (\sin x + y^3 + 4) dA$。

(2) 令 D 爲 $x^2+y^2\le 1$, 求 $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}dA$。

註 15.3.3. 兩種基本型式的區域:

(i) 第一型的平面區域爲

$$D=\{(x,y)\mid a\le x\le b, g_1(x)\le y\le g_2(x)\} \text{ 或記爲 } D: a\le x\le b, g_1(x)\le y\le g_2(x);$$

(ii) 第二型的平面區域爲

$$D=\{(x,y)\mid c\le y\le d, h_1(y)\le x\le h_2(y)\} \text{ 或記爲 } D: c\le y\le d, h_1(y)\le x\le h_2(y) \text{ 。}$$

定理 15.3.4 (Fubini 定理加強型)**.** (1) 令 D 由 $a\le x\le b, g_1(x)\le y\le g_2(x)$ 所定義, 其中 g_1, g_2 爲 $[a,b]$ 上的連續函數。若 f 在 D 上連續, 則 $\iint_D f(x,y)dA=\int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx$。

(2) 令 D 由 $c\le y\le d, h_1(y)\le x\le h_2(y)$ 所定義, 其中 h_1, h_2 爲 $[c,d]$ 上的連續函數。若 f 在 D 上連續, 則 $\iint_D f(x,y)dA=\int_c^d\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dxdy$。

定理 15.3.5. (重積分性質)

(1) $\iint_D [f(x,y)+g(x,y)]\,dA=\iint_D f(x,y)\,dA+\iint_D g(x,y)\,dA$。

(2) $\iint_D cf(x,y)\,dA=c\iint_D f(x,y)\,dA$。

(3) 若在 D 上, $f(x,y)\ge g(x,y)$, 則 $\iint_D f(x,y)\,dA\ge\iint_D g(x,y)\,dA$。

(4) 若 $D=D_1\cup D_2$, D_1 及 D_2 至多只在邊界上相交, 則

$$\iint_D f(x,y)\,dA=\iint_{D_1} f(x,y)\,dA+\iint_{D_2} f(x,y)\,dA \text{ 。}$$

(5) $\iint_D 1dA=A(D)$, 此處 $A(D)$ 表 D 的面積。

(6) 若 $m\le f(x,y)\le M, \forall (x,y)\in D$, 則 $mA(D)\le\iint_D f(x,y)\,dA\le MA(D)$。

例 15.3.6. 令 D 爲以原點爲圓心, 半徑爲 2 的圓, 估計 $\iint_D e^{\sin x\cos y}dA$。

定理 15.3.7. (重積分的平均值定理) 設 D 爲第一型或第二型的平面區域, 若 f 在 D 上連續, 則存在 $(x_0,y_0)\in D$, 使得 $\iint_D f(x,y)dA=f(x_0,y_0)A(D)$, 其中 $A(D)$ 爲 D 的面積。

例 15.3.8. 設 f 在包含 (a,b) 的某個開區域上連續, 令 B_r 是以 (a,b) 爲圓心, 以 r 爲半徑的閉圓, 證明 $\lim\limits_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint_{B_r} f(x,y)dA=f(a,b)$。

例 15.3.9. (1) 令 D 是由 $y=2x^2$ 及 $y=1+x^2$ 所圍成的區域, 求 $\iint_D (x+2y)\,dA$。

(2) 令 D 是由 $y=x-1$ 及 $y^2=2x+6$ 所圍成的區域, 求 $\iint_D xydA$。

例 15.3.10. (1) 令 D 是由 $y=2x$ 及 $y=x^2$ 所圍成的區域, 求在 $z=x^2+y^2$ 之下, 且在 D 之上之立體的體積。

(2) 一個稜柱 (prism) 其底是由 x-軸, $y=x$ 及 $y=1$ 所圍成之三角形, 其頂是平面 $z=3-x-y$。求其體積。

(3) 求由 $x+2y+z=2$、$x=2y$、$x=0$、$z=0$ 所圍之四面體的體積。

(4) 一立體以平面 $y=0$, $z=0$, $z=a-x-y$ 及柱面 $y=a-\frac{x^2}{a}$ 爲界, 其中 a 爲正數, 求其體積。

例 15.3.11. 令 D 爲 xy-平面上由 $y=x, y=x+a, y=a$ 及 $y=3a$ 所圍成之平行四邊形。求 $\iint_D (x^2+y^2)dA$。

例 15.3.12. 令 D 是半徑爲 a, 圓心爲 (a,a) 之圓與座標軸所圍成之區域。求 $\iint_D \frac{dA}{\sqrt{2a-x}}$。

例 15.3.13. 求 $\int_0^1\int_0^1 e^{\max\{x^2,y^2\}}dydx$ 。

<u>調換積分次序</u>

15.3.14. 在調換積分次序時, 第一步須將積分區域的圖畫出來, 第二步再利用圖形以不同次序描述該區域。

例 15.3.15. 描述 $\int_0^2\int_{x^2}^{2x}(4x+2)dydx$ 之積分區域, 並調換其積分次序。

例 15.3.16. (1) 求 $\int_0^1\int_x^1 \sin\left(y^2\right)dydx$。

(2) 求 $\int_0^1 dx\int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3}dy$。

(3) 求 $\int_0^1\int_{\sin^{-1}y}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sqrt{1+\cos^2 x}dxdy$。

例 15.3.17. 令 D 爲 xy-平面上由 x-軸, $y=x$ 及 $x=1$ 所圍成之三角形。求 $\iint_D \frac{\sin x}{x}dA$。

例 15.3.18. 求 $\int_e^{e^2}\int_1^{\ln y}\frac{\sin x}{xy}dxdy+\int_{e^2}^{e^4}\int_{\frac{\ln y}{2}}^2\frac{\sin x}{xy}dxdy$ 。

例 15.3.19. (1) 變換 $\int_0^{\frac{1}{2}}\int_{1-x^2}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dydx$ 之積分次序。

(2) 變換 $\int_1^2\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dydx$ 之積分次序。

(3) 變換 $\int_0^{2a}\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)dydx$ 之積分次序。

(4) 變換 $\int_0^1\int_{\tan^{-1}x}^{\pi/4} f(x,y)dydx$ 之積分次序。

例 15.3.20. 化簡 $\int_0^1\int_0^{2y} f(x,y)dxdy+\int_1^3\int_0^{3-y} f(x,y)dxdy$。

例 15.3.21. 證明 $\int_0^\infty \frac{\arctan \pi x-\arctan x}{x}dx=\frac{\pi}{2}\ln\pi$。

15.4　在極座標下的重積分(Double Integrals in Polar Coordinates)

定理 15.4.1. (極座標上的重積分) 令 R 爲極矩形 (polar rectangle), $0\le a\le r\le b, \alpha\le\theta\le\beta$, 且 $0\le\beta-\alpha\le 2\pi$。若 f 在 R 上連續, 則 $\iint_R f(x,y)\,dA=\int_\alpha^\beta\int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,rdrd\theta$。

例 15.4.2. R 是在上半平面, 由 $x^2+y^2=1$ 及 $x^2+y^2=4$ 所圍成的區域。求 $\iint_R (3x+4y^2)\,dA$。

例 15.4.3. 求由 $z=1-x^2-y^2$ 及 $z=0$ 所圍成的立體區域的體積。

定理 15.4.4. 考慮極平面上, 由 $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ 及連續曲線 $r=g_1(\theta)$, $r=g_2(\theta)$ 所圍成的 區域 D, 此處設 $0\le g_1(\theta)\le g_2(\theta)$, $\forall\theta\in[\alpha,\beta]$。設 $f(r,\theta)$ 爲 D 上的連續函數。則 $f(r,\theta)$ 在 D 上的重積分爲 $\iint_D f(r,\theta)dA=\int_{\theta=\alpha}^{\beta}\int_{r=g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r,\theta)rdrd\theta$。

[註] 第十章之極座標面積公式爲此定理之特例 。

例 15.4.5. (1) 令 D 爲 $r=1+\cos\theta$ 之內部, 且在 $r=1$ 之外部。將 $f(r,\theta)$ 在 D 上的積分以累次積分的形式寫出。

(2) 利用重積分求四瓣玫瑰線 $r=\cos 2\theta$ 中一葉的面積。

(3) 求雙紐線 $r^2=4\cos 2\theta$ 所圍之面積。

例 15.4.6. 令 D 爲第一象限中, 由 $x^2+y^2=4$ 及 $y=\sqrt{2}$ 所圍成的上半區域, 求 $\iint_D xdA$ 。

例 15.4.7. (1) 一立體位於 $z=x^2+y^2$ 之下, 在 xy-平面之上, 且位於柱面 $x^2+y^2=2x$ 之內。求其體積。

(2) 一立體位於 $x^2+y^2+z^2=4a^2$ 及 $x^2+y^2=2ay$ 之內, 其中 $a>0$。求其體積。

例 15.4.8. 若 D 爲環狀 $0<a^2\le x^2+y^2\le b^2$ 位於第一象限, 且在 $y=x$ 之下方的部份。求 $\iint_D \frac{y^2}{x^2}dA$ 。

例 15.4.9. (1) 將積分 $\int_0^1\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dydx$ 改爲極座標。

(2) 將積分 $\int_0^2\int_x^{\sqrt{3}x} f(x,y)dydx$ 改爲極座標。

例 15.4.10. 將積分 $\iint_D f(x,y)dA$ 改爲極座標, 其中 D 是由 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2), a>0$ 所圍成的區域

例 15.4.11. 求 $\iint_D \sin(\sqrt{x^2+y^2})dxdy$, 其中 D 爲 $\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2$。

例 15.4.12. 求 $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{x} xydydx+\int_1^{\sqrt{2}}\int_0^x xydydx+\int_{\sqrt{2}}^{2}\int_0^{\sqrt{4-x^2}} xydydx$。

例 15.4.13. (1) 令 D 爲 $y=\sqrt{1-x^2}$ 及 x 軸所圍的半圓。求 $\iint_D e^{x^2+y^2}dydx$。

(2) 求 $I=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$。

(3) 求 $\int_0^{\infty} x^2e^{-x^2}dx$。

(4) 求 $\int_{-\infty}^{\infty} x^ne^{-x^2}dx$。

(5) 求 $\int_0^{\infty}\sqrt{x}e^{-x}dx$。

例 15.4.14. 求 $\int_{\tan^{-1}2}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{3}{\cos\theta+\sin\theta}} r^3\cos\theta\sin\theta drd\theta$。

15.5 雙重積分的應用(Applications of Double Integrals)

面積

15.5.1. 一個封閉有界平面區域 D 的面積爲 $A=\iint_D dA$。

例 15.5.2. 求平面上由 $y=x$ 及 $y=x^2$ 在第一象限所圍的面積。

例 15.5.3. 求抛物線 $y=x^2$ 及直線 $y=x+2$ 所圍區域 D 之面積。

平均值

定義 15.5.4. 函數 f 在區域 D 上的平均值爲 $\frac{1}{D\text{ 的面積}}\iint_D f\,dA$。

例 15.5.5. (a) 求 $f(x,y)=x\cos xy$ 在 $D: 0\le x\le\pi, 0\le y\le 1$ 上的平均值。

(b) 求函數 $f(x)=\int_x^1\cos(t^2)dt$ 在 $[0,1]$ 上的平均值。

例 15.5.6. 若區域 D 的面積爲 A , 則 $f(x)=x$ 在 D 上的平均值即爲形心之 x-座標。

例 15.5.7. (a) 取一正數 c, 將其分爲兩部分, 求此兩部分之乘積的平均值 。

(b) 取一正數 c, 將其分爲三部分, 求此三部分之乘積的平均值 。

力矩與質心

定義 15.5.8. 一薄片位於 xy-平面上的區域 D, 在 (x,y) 的密度爲 $\rho(x,y)$, 其中 ρ 爲連續函數。

(a) 其質量爲 $M=\iint_D \rho(x,y)\,dA$。

(b) 對 x-軸的一次矩 (first moment) 爲 $M_x=\iint_D y\rho(x,y)dA$, 對 y-軸的一次矩爲 $M_y=\iint_D x\rho(x,y)dA$。

(c) 質心 (center of mass) 爲 $\overline{x}=\frac{M_y}{M}$, $\overline{y}=\frac{M_x}{M}$。

(d) 一個幾何圖形, 視爲 $\delta(x,y)=1$ 的薄片, 則其質心爲形心 (centroid)。

例 15.5.9. 在 xy-平面上, 由 x-軸, $x=1$ 及 $y=2x$ 在第一象限所圍的三角形上有一薄片, 其密度爲$\rho(x,y)=6x+6y+6$。求質量, 一次矩及質心。

例 15.5.10. 一三角形之頂點爲 $(0,0)$、$(1,0)$、$(0,2)$, 其密度爲 $\rho(x,y)=1+3x+y$。求其質量及質心。

例 15.5.11. 一個半圓的薄片, 其密度與離圓心的距離成正比。求其質心。

例 15.5.12. 在第一象限中, 以 $y=x$ 爲上界, 以 $y=x^2$ 爲下界的區域 D, 求其形心。

二次矩

定義 15.5.13. (a) 對 x-軸的二次矩 (second moment, moment of inertia) 爲 $I_x=\iint_D y^2\rho(x,y)dA$。

(b) 對 y-軸的二次矩爲 $I_y=\iint_D x^2\rho(x,y)dA$。

(c) 對直線 L 的二次矩爲 $I_L=\iint_D r^2\rho(x,y)dA$, 其中 r 爲 (x,y) 到 L 的距離。

(d) 對原點的二次矩 (極力矩, polar moment of inertia) 爲 $I_0=\iint_D(x^2+y^2)\rho(x,y)dA$。

(e) 迴轉半徑 (radius of gyration): 對 x-軸爲 $\overline{\overline{y}} = \sqrt{I_x/M}$, 對 y-軸爲 $\overline{\overline{x}} = \sqrt{I_y/M}$, 對原點爲 $R_0 = \sqrt{I_0/M}$。

(f) 對一個軸的迴轉半徑 R 滿足 $mR^2 = I$, 此處 I 是對給定軸的二次矩。

[註]

(1) 一個薄片的 $(\overline{\overline{x}}.\overline{\overline{y}})$ 可視爲質量的集中點, 而不影響該薄片的二次矩。

(2) 因 $r^2 = x^2 + y^2$, 故 $I_0 = I_x + I_y$。I_0 一般記爲 I_z。$I_z = I_x + I_y$ 稱爲 垂直軸定理 (Perpendicular Axis Theorem)。

(3) 迴轉半徑 (radius of gyration) 滿足 $I_x = M\overline{\overline{y}}^2$, $I_y = M\overline{\overline{x}}^2$, $I_0 = MR_0^2$。

例 15.5.14. D 爲一個均勻的圓盤, 中心在原點, 半徑爲 a。若密度爲 $\rho(x, y) = \rho$, 求 I_x, I_y 及 I_0, 並求對 x-軸的迴轉半徑。

例 15.5.15. 在 xy-平面上, 由 x-軸, $x = 1$ 及 $y = 2x$ 在第一象限所圍的三角形上有一薄片, 其密度爲 $\delta(x, y) = 6x + 6y + 6$。求二次矩及迴轉半徑。

例 15.5.16. D 爲圓 $x^2 + y^2 = 1$ 之內部在第一象限中的部分。若一薄片之密度爲 $\delta(x, y) = 1$, 形狀爲 D, 求極力矩 I_0。

<u>電量</u>

15.5.17. 若電荷分佈在 D 上, 電荷密度 (charge density) 爲 $\sigma(x, y)$, 則總電量 (total charge) 爲 $Q = \iint_D \sigma(x, y)\, dA$。

例 15.5.18. D 是由 $x = 1$、$y = 1$、$y = 1 - x$ 所圍成的區域, 其上的電荷密度爲 $\sigma(x, y) = xy(\mathrm{C/m^2})$, 求總電量。

<u>機率</u>

定義 15.5.19. 有兩個連續的隨機變數 (random variable) X 及 Y, 其聯合密度函數 (joint density function) 爲 $f(x, y)$ 滿足 $P((x, y) \in D) = \iint_D f(x, y)\, dA$。

[註] 若 $f(x, y)$ 是聯合密度函數, 則

(1) $f(x, y) \geq 0$。

(2) $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, dA = 1$。

例 15.5.20. 若 X 及 Y 的聯合密度函數爲

$$f(x, y) = \begin{cases} C(x + 2y) & (x, y) \in [0, 10] \times [0, 10] \\ 0 & \text{其他 。} \end{cases}$$

求 C 之值, 並求 $P(X \leq 7, Y \geq 2)$。

定義 15.5.21. 令 X 的機率密度函數 (probability density function) 是 $f_1(x)$, Y 的機率密度函數是 $f_2(x)$, 當 X、Y 的聯合密度函數爲 $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$, 則稱 X 及 Y 是獨立的隨機變數 (independent random varibles)。

例 15.5.22. 一個戲院經理算出每個客人買票平均等候時間是 10 分, 買爆米花平均要 5 分鐘。假設這兩個時間是獨立的, 則一個客人花 20 分鐘以內進到戲院的機率是多少?
(註: 等候時間的模式是 $f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \frac{1}{\mu}e^{-\frac{t}{\mu}} & t\geq 0,\end{cases}$ 其中 μ 是平均等候時間。)

定義 15.5.23. 隨機變數 X、Y 的聯合密度函數爲 $f(x,y)$, 則 X-期望值(X-mean, expected value) 爲

$$\mu_x=\iint_{\mathbb{R}^2} xf(x,y)\,dA$$

及 Y-期望值爲

$$\mu_y=\iint_{\mathbb{R}^2} yf(x,y)\,dA\ 。$$

例 15.5.24. 一工廠生產圓柱形軸承, 直徑 4.0 cm、長 6.0 cm。實際上產品尺寸呈正規分佈, 直徑 X 的平均値是 4 cm、標準差是 0.01 cm, 長度 Y 的的平均値是 6 cm、標準差是 0.01 cm。假設 X 及 Y 是獨立的, 從生產線上任取一個產品, 它的直徑或長超過 平均値 0.02 cm 的機率是多少?
(註: 正規分佈的模式是 $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, 其中 μ 是期望值, σ 是標準差。)

15.6 曲面之表面積(Area of Surfaces)

定理 15.6.1. 若 S 是由 $z=f(x,y)$,$(x,y)\in D$ 所定義。f 有連續的偏導函數。則 S 之面積爲

$$A(S)=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dA\ 。$$

[註] 若 $f(x)\geq 0$ 且 $f'(x)$ 爲連續, 將曲線 $y=f(x)$,$a\leq x\leq b$ 繞 x 軸旋轉所得旋轉面 S, 其表面積爲 $A=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$

例 15.6.2. 令 T 爲 xy-平面上頂點爲 (0,0),(1,0) 及 (1,1) 之三角形區域, 求曲面 $z=x^2+2y$ 位於 T 以上的部分面積。

例 15.6.3. 求曲面 $z=1+x+x^2+y$ 在 $R=[-2,1]\times[-1,1]$ 上的表面積。

例 15.6.4. (1) 求曲面 $z=x^2+y^2$ 在 $z=9$ 之下的部分面積。

(2) 求曲面 $z=x^2-y^2$ 位於 $x^2+y^2=a^2$ 之內的部分面積。

例 15.6.5. 求錐面 $z=\sqrt{x^2+y^2}, 0\leq z\leq 1$ 之表面積。

例 15.6.6. 求柱面 $x^2+y^2=1$ 與 $x^2+z^2=1$ 相交部份之表面積。

15.7 直角座標系下的三重積分(Triple Integrals in Rectangle Coordinates)

定義 15.7.1. (1) 令 $f(x,y,z)$ 爲 $B=[a,b]\times[c,d]\times[r,s]$ 上的函數, 將 B 分割成 lmn 個子立方體,$B_{ijk}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]\times[z_{k-1},z_k]$。則 $\triangle V=\triangle x\triangle y\triangle z$, 在 B_{ijk} 中任取一個樣本點 $\left(x^*_{ijk},y^*_{ijk},z^*_{ijk}\right)$, 則得一個三重 Riemann 和 $\sum\limits_{i=1}^{l}\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(x^*_{ijk},y^*_{ijk},z^*_{ijk}\right)\triangle V$。

(2) f 在 B 上的三重積分 (triple integral) 爲

$$\iiint_B f\left(x,y,z\right)dV=\lim_{l,m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}f\left(x^*_{ijk},y^*_{ijk},z^*_{ijk}\right)\triangle V。$$

若此極限存在, 則稱 $F(x,y,z)$ 在 B 上可積分。

定理 15.7.2. (Fubini 定理): 若 f 在 $B=[a,b]\times[c,d]\times[r,s]$ 上連續, 則 $\iiint_B f\left(x,y,z\right)dV=\int_r^s\int_c^d\int_a^b f\left(x,y,z\right)dxdydz$。

例 15.7.3. 若 $B=[0,1]\times[-1,2]\times[0,3]$, 求 $\iiint_B xyz^2dV$。

定義 15.7.4. 若 E 爲空間中一立體, 取一立方體 B 包含 E, 令

$$F\left(x,y,z\right)=\begin{cases}f\left(x,y,z\right) & \left(x,y,z\right)\in E\\ 0 & \left(x,y,z\right)\in B\setminus E\end{cases}。$$

則定義 $\iiint_E f\left(x,y,z\right)dV=\iiint_B F\left(x,y,z\right)dV$。

定義 15.7.5. 空間中的有界閉區域 E 之體積爲 $V=\iiint_E dV$。

定理 15.7.6 (三重積分的性質)**.** 若 $f(x,y,z)$ 及 $g(x,y,z)$ 爲 E 上的連續函數, 則:

(1) $\iiint_E kfdV=k\iiint_E fdV$。

(2) $\iiint_E(f\pm g)dV=\iiint_E fdV\pm\iiint_E gdV$。

(3) 若在 E 上, $f(x,y,z)\geq 0$, 則 $\iiint_E fdV\geq 0$。

(4) 若在 E 上, $f(x,y,z)\geq g(x,y,z)$, 則 $\iiint_E fdV\geq\iiint_E gdV$。

(5) 若 E 是兩個不重疊區域 E_1 及 E_2 之聯集, 則 $\iiint_E fdV=\iiint_{E_1}fdV+\iiint_{E_2}fdV$。

註 15.7.7. (1) 立體區域 E 稱爲 type 1, 若 $E=\{(x,y,z)\mid(x,y)\in D,u_1\left(x,y\right)\leq z\leq u_2\left(x,y\right)\}$。
若 f 在 E 上連續, 則 $\iiint_E f\left(x,y,z\right)dV=\iint_D\left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)}f\left(x,y,z\right)dz\right]dA$。
更進一步:
若 D 爲 xy-平面上的 type I, 即 $D=\{(x,y)\mid a\leq x\leq b,g_1\left(x\right)\leq y\leq g_2\left(x\right)\}$, 則 $\iiint_E f\left(x,y,z\right)dV=\int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)}\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)}f\left(x,y,z\right)dzdydx$;
若 D 爲 xy-平面上的 type II, 即 $D=\{(x,y)\mid c\leq y\leq d,h_1\left(y\right)\leq x\leq h_2\left(y\right)\}$, 則 $\iiint_E f\left(x,y,z\right)dV=\int_c^d\int_{h_1(y)}^{h_2(y)}\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)}f\left(x,y,z\right)dzdxdy$。

(2) 立體區域 E 稱爲 type 2, 若 $E=\{(x,y,z)\mid(y,z)\in D,u_1(y,z)\le x\le u_2(y,z)\}$。此時 $\iiint_E f(x,y,z)\,dV=\iint_D\left[\int_{u_1(y,z)}^{u_2(y,z)}f(x,y,z)\,dx\right]dA$。

(3) 立體區域 E 稱爲 type 3, 若 $E=\{(x,y,z)\mid(x,z)\in D,u_1(x,z)\le y\le u_2(x,z)\}$。此時 $\iiint_E f(x,y,z)\,dV=\iint_D\left[\int_{u_1(x,z)}^{u_2(x,z)}f(x,y,z)\,dy\right]dA$。

例 15.7.8. (1) 一四面體 T 由平面 $x+2y+z=2$、$x=2y$、$x=0$、$z=0$ 所圍成, 求 T 的體積。

(2) 令 E 爲 $x=0$、$y=0$、$z=0$、$x+y+z=1$ 所圍成立方體, 求 $\iiint_E z\,dV$。

(3) 令 E 爲 $y=x^2+z^2$及 $y=4$ 所圍成的區域, 求 $\iiint_E\sqrt{x^2+z^2}\,dV$。

例 15.7.9. 求 $\iiint_{x^2+y^2+z^2\le1}(2+x+\sin z)dV$。

例 15.7.10. E 是一個以 $(0,0,0),(1,1,0),(0,1,0),(0,1,1)$ 爲頂點的四面體, 欲求其體積。以 6 種不同的積分次序寫出其積分式, 並求其體積。

例 15.7.11. (1) 將 $\int_0^1\int_y^1\int_0^z f(x,y,z)dxdzdy$ 以其他五種積分順序表出。

(2) 將 $\int_0^1\int_0^{1-z}\int_0^2 dxdydz$ 以其他五種積分順序表出。

(3) 將 $\int_0^1\int_0^{x^2}\int_0^y dzdydx$ 以其他五種積分順序表出。

(4) 將 $\int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 dzdydx$ 表成其他五種積分順序。

例 15.7.12. 將以下積分以其他五種積分順序表出。

(1) $\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1\int_0^{1-y}f(x,y,z)dzdydx$。

(2) $\int_0^1\int_0^{1-x^2}\int_0^{1-x}f(x,y,z)dydzdx$。

(3) $\int_0^1\int_y^1\int_0^y f(x,y,z)dzdxdy$。

例 15.7.13. 證明 $\int_0^x\int_0^y\int_0^z f(t)dtdzdy=\frac{1}{2}\int_0^x(x-t)^2f(t)dt$ 。

15.8 三重積分之應用(Applications of Triple Integrals)

定義 15.8.1. $F(x,y,z)$ 在 E 上的平均值爲 $\dfrac{F\text{ 在 }E\text{ 上的積分}}{E\text{ 的體積}}=\dfrac{\iiint_E F\,dV}{\iiint_E dV}$。

例 15.8.2. 令 B 爲 $x=2$, $y=2$ 及 $z=2$ 在第一卦限所圍的區域, 求 $f(x,y,z)=xyz$ 在其上的平均值。

定義 15.8.3. 某立體位於空間中的區域 E, 且其密度函數爲 $\rho(x,y,z)$, 則:

(1) 其質量爲 $M=\iiint_E\rho(x,y,z)dV$。

(2) 對三個座標面的一次矩分別爲

$$M_{yz}=\iiint_E x\rho(x,y,z)dV, M_{xz}=\iiint_E y\rho(x,y,z)dV, M_{xy}=\iiint_E z\rho(x,y,z)dV$$ 。

(3) 令 $\bar{x}=\frac{M_{yz}}{M}$, $\bar{y}=\frac{M_{xz}}{M}$, $\bar{z}=\frac{M_{xy}}{M}$, 則質心 座標爲 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$。若密度爲常數, 則質心稱爲形心(centroid)。

(4) 對三個座標軸的二次矩分別爲

$$I_x=\iiint_E (y^2+z^2)\rho(x,y,z)dV, I_y=\iiint_E (x^2+z^2)\rho(x,y,z)dV, I_z=\iiint_E (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dV$$ 。

(5) 對直線 L 的轉動慣量爲 $I_L=\iiint_E r^2\rho(x,y,z)dV$, 其中 $r(x,y,z)$ 爲 (x,y,z) 到直線 L 的距離 。因此 (4) 即爲 E 對三個座標軸的轉動慣量。

(6) 若 E 上的電荷密度爲 $\sigma(x,y,z)$, 則總電荷 $Q=\iiint_E \sigma(x,y,z)dV$。

(7) 令 X,Y,Z 爲三個連續的隨機變數, 且它們的聯合密度函數爲 $f(x,y,z)$, 則機率 $P((X,Y,Z)\in E)=\iiint_E f(x,y,z)dV$。此處 $f(x,y,z)\geq 0$ 且 $\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)dV=1$。

例 15.8.4. 一立體以曲面 $x=y^2$ 及平面 $x=z$、$z=0$、$x=1$ 爲界, 求其形心。

例 15.8.5. 一個立方體 $E:-\frac{a}{2}\leq x\leq\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\leq y\leq\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\leq z\leq\frac{c}{2}$, 密度 ρ 爲常數, 求 I_x、I_y、I_z。

例 15.8.6. 求由 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 與座標面所圍成四面體的形心。

例 15.8.7. 一個密度均勻的立體是位於 $x^2+y^2+z^2=4a^2$ 之內部及 $x^2+y^2=a^2$ 之外部, 求其對 z-軸轉動慣量。

例 15.8.8. 一個立體由 $x^2+z^2=a^2$, $y^2+z^2=a^2$, $z\geq 0$ 所圍成, 求其形心。

例 15.8.9. 一個立體 E 其下界是在 $z=0$ 平面上的圓 $x^2+y^2\leq 4$, 其上界爲 $z=4-x^2-y^2$。密度 δ 爲常數, 求質心 。

15.9 柱面座標與球面座標上的三重積分 (Triple Integrals in Cylindrical and Spherical Coordinates)

<u>柱面座標</u>

定義 15.9.1. 空間中任一點 P 的柱面座標 (cylindrical coordinate system) 爲 (r,θ,z), 其中

(1) (r,θ) 爲 P 在 xy-平面之投影 (x,y) 的極座標。

(2) z 即爲直角座標之 z。

註 15.9.2. (1) P 的直角座標 (x, y, z) 與其柱面座標 r, θ, z 的關係為

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

以及

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

(2) 在柱面座標中, $r = c$ 為以 z-軸為軸, 半徑為 c 之圓柱面; $\theta = c$ 為包含 z 軸之平面; $z = c$ 為垂直於 z 軸之平面。

例 15.9.3. (1) 畫出柱面座標 $\left(2, \frac{2\pi}{3}, 1\right)$ 表示之點, 並求其直角座標。

(2) 將直角座標 $(3, -3, 7)$ 轉換為柱面座標。

例 15.9.4. 描述柱面座標方程式 $z = r$ 之曲面。

定理 15.9.5. 若空間中的立體可用柱面座標表示為 $E = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, u_1(x, y) \le z \le u_2(x, y)\}$, 而 $D = \{(r, \theta) | \alpha \le \theta \le \beta, h_1(\theta) \le r \le h_2(\theta)\}$, 則函數 $f(x, y, z)$ 在 E 上的積分為

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1(r\cos\theta, r\sin\theta)}^{u_2(r\cos\theta, r\sin\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\, dz\, dr\, d\theta.$$

例 15.9.6. D 為一空間中的區域, 其底為平面 $z = 0$, 側面為圓柱 $x^2 + (y-1)^2 = 1$, 上界為 $z = x^2 + y^2$, 而 $f(r, \theta, z)$ 為 D 上以柱面座標表示的函數。將 f 在 D 上的積分式寫出。

例 15.9.7. 一個水瓶分成上下兩部份: 上半是柱面座標曲面, $r = 1 + (z - \sqrt{3})^2$, $\sqrt{3} \le z \le 1 + \sqrt{3}$; 下半是球面截去兩端, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $-\sqrt{3} \le z \le \sqrt{3}$。求此瓶的容積。

例 15.9.8. 一個立體由 $x^2 + y^2 = 4$ 圍成, 上界是 $z = x^2 + y^2$, 下界是 xy-平面。求其形心。

例 15.9.9. E 為在 $x^2 + y^2 = 1$ 之內, 以 $z = 4$ 為上界、以 $z = 1 - x^2 - y^2$ 為下界之立體。任一點的密度與它和柱面之軸的距離成正比, 求其質量。

例 15.9.10. 求 $\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} (x^2 + y^2) dz\, dy\, dx$。

<u>球面座標</u>

定義 15.9.11. 空間中任一點 P 之球面座標 (spherical coordinate) 為 (ρ, θ, ϕ), 其中

(1) ρ 為 P 到原點的距離。

(2) θ 為柱面座標的 θ $(0 \le \theta \le 2\pi)$。

(3) ϕ 為 $\overrightarrow{OP}$ 與正 z-軸的夾角 $(0 \le \phi \le \pi)$。

註 15.9.12. (1) 柱面座標中的 $r = \rho\sin\theta$, 而 P 的直角座標 (x, y, z) 與其球面座標 (ρ, θ, ϕ) 的關係為

$$\begin{cases} x = r\cos\theta = \rho\sin\phi\cos\theta \\ y = r\sin\theta = \rho\sin\phi\sin\theta \\ z = \rho\cos\phi \end{cases}$$

以及

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 = r^2 + z^2.$$

(2) 在球面座標中, $\rho = c$ 爲一半徑 c 的球面; $\phi = c$ 爲一半錐面; $\theta = c$ 爲一半平面。

例 15.9.13. (1) 畫出球面座標爲 $\left(2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$之點, 並求其直角座標。

(2) 一點之直角座標爲 $\left(0, 2\sqrt{3}, -2\right)$, 求其球面座標。

例 15.9.14. (1) 求球 $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ 之球面座標方程式。

(2) 求錐面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 之球面座標方程式。

定理 15.9.15. 若 E 爲球面座標下的圓楔形 (spherical wedge), 即 $E = \{(\rho, \theta, \phi) | a \le \rho \le b, \alpha \le \theta \le \beta, c \le \phi \le d\}$, 則

$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\rho^2\sin\phi d\rho d\theta d\phi。$$

例 15.9.16. (1) 令 B 爲單位球, 求 $\iiint_B e^{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} dV$。

(2) 求 $\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV$, 其中 D 是 $x^2 + y^2 + z^2 = z$ 所圍成的立體。

例 15.9.17. 一立體位於 $x^2 + y^2 + z^2 = z$ 之下, 且位於 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 之上, 求其體積。

例 15.9.18. (a) 將球 $\rho \le 1$ 以錐面 $\phi = \frac{\pi}{3}$ 切之, 得一甜筒。求其體積。

(b) 若密度 $\delta = 1$, 求它對 z 軸的轉動慣量。

例 15.9.19. 一立體位於 $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$, 若一點與原點的距離爲 ρ, 其密度爲 $k\rho$, 求其重心。

例 15.9.20. 求函數 $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2)}}$ 在球殼 $0 < r \le \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \le 1$ 上的平均值。

例 15.9.21. 求曲面 $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2)$, $a > 0$, 所圍之立體的體積。

例 15.9.22. 求 $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2 dz dy dx$。

例 15.9.23. 求 $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dz dy dx$。

例 15.9.24. 令 $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} & (x,y,z) \ne (0,0,0) \\ & (x,y,z) = (0,0,0), \end{cases}$ 其中 a, b, c 爲常數, $a^2 + b^2 + c^2 > 0$。對 $\epsilon \in (0,1)$, 令 $B_\epsilon = \{(x,y,z) | 0 < \epsilon \le (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \le 1\}$, 求 $\lim\limits_{\epsilon \to 0^+} \iiint_{B_\epsilon} f(x,y,z)dV$。

例 15.9.25. (a) 求 $\iint_D \frac{dA}{(x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}}$, 其中 n 爲整數, D 爲圓心爲原點, 半徑爲 r 及 R 所成的環狀面。

(b) 在上題中, $r \to 0+$ 時, 極限爲何?

(c) 求 $\iiint_D \frac{dA}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}}}$, 其中 n 爲整數, D 爲圓心爲原點, 半徑爲 r 及 R 所成的環狀體。

(d) 在上題中, $r \to 0+$ 時, 極限爲何?

例 15.9.26. Laplace 方程是 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$。

(a) 在柱面座標下 Laplace 方程可寫成 $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$。

(b) 在球面座標下 Laplace 方程可寫成 $\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\cot\phi}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\rho^2\sin^2\phi}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$。

15.10 重積分的變數變換

定義 15.10.1. (1) 一個從 uv-平面到 xy-平面的變換 (transformation) 是一個函數 $T : S \to \mathbb{R}^2$ (S 是 $\mathbb{R}^2$ 的子集) , 記爲 $T(u,v) = (x,y)$, 而 $x = g(u,v)$, $y = h(u,v)$。

(2) 若 $T(u_1,v_1) = (x_1,y_1)$, 則 (x_1,y_1) 稱爲 (u_1,v_1) 的寫像(image), 若 $T(S) = R$, 則 R 稱爲 S 的寫像。

(3) 若沒有兩個相異點有相同的寫像, 則稱 T 爲一對一 (one to one)。

(4) 若 T 爲一對一, 則 T 有反變換 (inverse transformation) T^{-1} 從 xy-平面對應到 uv-平面。

例 15.10.2. 一個變換之定義爲 $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$, $S = \{(u,v) \mid 0 \le u \le 1, 0 \le v \le 1\}$。求 S 的寫像。

例 15.10.3. 一個變換之定義爲 $x = v$, $y = u(1+v^2)$, 求 $S = \{(u,v) \mid 0 \le u \le 1, 0 \le v \le 1\}$ 的寫像。

定義 15.10.4. 變換 $T(u,v)$ 定義爲 $x = g(u,v)$, $y = h(u,v)$, 則其 Jacobian 爲 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$。

定義 15.10.5. 一個變換 $T(u,v) = (g(u,v), h(u,v))$ 若滿足 g 及 h 都有連續的一階偏導函數, 則 T 稱爲 C^1 變換。

定理 15.10.6. 各符號如同前述。假設

(i) T 是 C^1 變換, 其 Jacobian 只可能在孤立點 (isolated point) 爲零。

(ii) T 將 uv-平面上的區域映成 (map onto) xy-平面上的區域 R。

(iii) 除了在 S 的邊界外, T 是一對一。

(iv) $f(x,y)$ 在 R 上連續。

則 $\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_S f(x(u,v), y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$。

例 15.10.7. 將直角座標變換爲極座標, 其 Jacobian 爲 r。

例 15.10.8. 利用變換 $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$, 求積分 $\iint_R y\,dA$, 此處 R 是由 x-軸, $y^2 = 4 - 4x$ 及 $y^2 = 4 + 4x$, $y \ge 0$ 所圍成的區域。

例 15.10.9. 求四個拋物線 $y = x^2$, $y = 2x^2$, $x = y^2$ 及 $x = 3y^2$ 所圍成的區域面積。

例 15.10.10. (1) 令 R 是以 $(0,0), (a,0), (0,a)$ 爲頂點之三角形, 求 $\iint_R \sqrt{x+y}\,dA$。

(2) 令 R 是由 $xy = 1, xy = 5, x = 1, x = 6$ 所圍成, 求 $\iint_R \frac{xy}{1+x^2y^2}dA$。

(3) R 是以 $(1,0)$、$(2,0)$、$(0,-2)$、$(0,-1)$ 爲頂點的梯形 (traperodial), 求 $\iint_R e^{\frac{x+y}{x-y}}dA$。

(4) 令 R 是以 $(4,0), (6,2), (4,4), (2,2)$ 爲頂點之四邊形, 求 $\iint_R (x+y)e^{x-y}dA$。

(5) 若 R 爲 x-軸, $y = x$ 及 $x^2 + 4y^2 = 4$ 在第一象限所圍成的區域, 求 $\iint_D \frac{y}{x}dA$

例 15.10.11. (1) 令 R 爲橢圓 $9x^2+4y^2=1$ 在第一象限的內部, 求 $\iint_R \sin(9x^2+4y^2)dA$ 。

(2) 令 R 爲 $x^2-xy+y^2=2$ 所圍區域, 求 $\iint_R (x^2-xy+y^2)dA$ 。

例 15.10.12. (1) 求 $\int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{y}{2}+1} \frac{2x-y}{2}\,dx\,dy$。

(2) 求 $\int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x+y}(y-2x)^2\,dy\,dx$。

例 15.10.13. 若 f 在 $[0,1]$ 上連續, 且 R 是以 (0,0),(1,0),(0,1) 爲頂點之三角區域, 證明 $\iint_R f(x+y)dA = \int_0^1 uf(u)du$。

定義 15.10.14. 若 $\begin{cases} x=g(u,v,w) \\ y=h(u,v,w) \\ z=k(u,v,w) \end{cases}$ 將 uvw- 空間中區域 G 一對一地對應到 xyz-空間中的 D , 其 Jacobian 爲 $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$。

定理 15.10.15. 若 $f(x,y,z)$ 爲 R 上的連續函數, g,h,k 有連續的偏導函數, 則 $\iiint_R f\,(x,y,z)\,dV = \iiint_S f\,(x\,(u,v,w)\,,y\,(u,v,w)\,,z\,(u,v,w))\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw$。

例 15.10.16. (1) 直角座標變換爲柱面座標的 Jacobian 是 r。

(2) 直角座標變換爲球面座標的 Jacobian 是 $\rho^2\sin\varphi$。

例 15.10.17. 求 $\int_0^3 \int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{y}{2}+1} (\frac{2x-y}{2}+\frac{z}{3})\,dx\,dy\,dz$。

例 15.10.18. 求 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \le 1$ 之體積。

例 15.10.19. 求區域 E 使得積分 $\iiint_E (1-x^2-2y^2-3z^2)dV$ 之值爲最大, 並求此最大值。

例 15.10.20. 平面 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, $a>0, b>0, c>0$, 將 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 切成兩部份, 求較小部份的體積。

例 15.10.21. (1) 區域 E 位於平面 $z=3-2y$ 之下, 拋物面 $z=x^2+y^2$ 之上 , 求其體積。

(2) 區域 E 是由 $z=x^2+3y^2$ 及 $z=8-x^2-y^2$ 所圍成的, 求其體積。

(3) 區域 E 是由 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$ 與座標面所圍成的, 求其體積。

例 15.10.22. 令 E 是由 $-x+y+z=0$, $x-y+z=0$, $x+y-z=0$ 及 $-x+5y+7z=6$ 圍成的四面體。

(a) 求 E 的體積 。

(b) 求 $\iiint_E z dV$。

例 15.10.23. 令 $D=\{(x,y,z)|2x^2+3y^2+6yz+5z^2+2xz \le 1\}$, 求 $\iiint_D (x+y+z)^2 dV$。

例 15.10.24. (a) 證明 $\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy}dxdy = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$。

(b) 證明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$。

例 15.10.25. (a) 證明 $\int_0^1\int_0^1\int_0^1\frac{1}{1-xyz}dxdydz=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$。

(b) 證明 $\int_0^1\int_0^1\int_0^1\frac{1}{1+xyz}dxdydz=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3}$。