第 14 章

偏導數 (Partial Derivatives)

目錄

14.1 多變數函數 (Functions of Several Variables)

定義 14.1.1. 令 D 爲 $\mathbb{R}^n$ 中的集合, 從 D 映至 $\mathbb{R}$ 的函數 f 稱爲 D 上的 n 變數實函數 (real-valued function of n variables) , 其中 D 爲其定義域 (domain), $f(D)$ 爲其值域 (range)。

註 14.1.2. (1) 若 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 爲 n 變數函數。我們可將 f 視爲:

(a) n 個實變數 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的函數。

(b) $\mathbb{R}^n$ 中之點 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的函數。

(c) 向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的函數。

(2) 若一函數以數學式定義, 但未指明其定義域, 則其定義域設定爲所有使函數式有意義之範圍。

例 14.1.3. Cobb-Douglas 生產函數 $P(L,K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$, $\mathrm{Dom}P = \{(L,K)|L \geq 0, K \geq 0\}$, 其中 P 是總產量, L 是勞動力, K 是投資成本。

例 14.1.4. 求以下函數之定義域及 $f(3,2)$ 之值:

(1) $f(x,y) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$,

(2) $f(x,y) = x\ln(y^2 - x)$。

例 14.1.5. 求 $f(x,y,z) = \ln(z-y) + xy\sin z$ 的定義域。

例 14.1.6. 求下列函數之定義域及值域:

(1) $w(x,y) = \sin xy$,

(2) $w(x,y,z) = xy\ln z$,

(3) $w(x,y,z) = \frac{1}{xy}$,

(4) $w(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$,

(5) $w(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$,

(6) $w(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$,

(7) $w(x,y,z) = \sqrt{y-x^2}$ 。

14.2 圖形 (Graphs)

圖形

定義 14.2.1. 令 $f(x,y)$ 為定義在 D 上的雙變數函數, 則集合

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = f(x,y),\ (x,y) \in D\}$$

稱為 f 的圖形 (graph)。

例 14.2.2. 描述下列函數之之圖形:

(1) $f(x,y) = 6 - 3x - 2y$,

(2) $f(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$,

(3) $h(x,y) = 4x^2 + y^2$ 。

例 14.2.3. 若 g 是單變數函數, 則如何由 g 之圖形得到 $f(x,y) = g(\sqrt{x^2+y^2})$ 之圖形。

例 14.2.4. 描述 $P(L,K) = 1.01L^{0.75}K^{0.25}$ 之圖形。

例 14.2.5. 描繪以下函數的圖形:

(1) $f(x,y) = (x^2+3y^2)\,e^{-x^2-y^2}$,

(2) $f(x,y) = \sin x + \sin y$,

(3) $f(x,y)=\frac{\sin x\sin y}{xy}$。

<u>等值曲線</u>

定義 14.2.6. 任給一常數 k, 曲線 $f(x,y)=k$ 稱爲函數 f 的等值曲線 (level curve, contour curve)。

例 14.2.7. 等高線、等溫線、等壓線均爲等值曲線。

例 14.2.8. 圖爲 $f(x,y)$ 的等值曲線, 試估計 $f(1,3)$ 及 $f(4,5)$。

例 14.2.9. 描繪以下函數的的等值曲線:

(1) $f(x,y)=6-3x-2y$,

(2) $g(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$,

(3) $h(x,y)=4x^2+y^2$。

例 14.2.10. 描繪函數 $P(L,K)=1.01L^{0.75}K^{0.25}$ 的等值曲線。

例 14.2.11. 描繪以下函數的等值曲線:

(1) $f(x,y)=-xye^{-x^2-y^2}$,

(2) $f(x,y)=\frac{-3y}{x^2+y^2+1}$ 。

例 14.2.12. 描繪以下各函數的圖形及等值曲線:

(1) $z=e^{-\frac{x^2+y^2}{8}}(\sin x^2+\cos y^2)$,

(2) $z=\sin x+2\sin y$,

(3) $z=(4x^2+y^2)\,e^{-x^2-y^2}$,

(4) $z=xye^{-y^2}$。

<u>等值曲面</u>

定義 14.2.13. 若 $w=f(x,y,z)$ 爲三變數函數, 則曲面 $f(x,y,z)=c$ 稱爲 f 的等值曲面 (level surface)。

例 14.2.14. 描繪以下函數的的等值曲面:

(1) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$,

(2) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 。

14.3 極限 (Limits)

定義與性質

定義 14.3.1. (1) 令 $z = f(x, y)$。若對任意的 $\epsilon > 0$, 都存在 $\delta > 0$ 使得對所有 $(x, y) \in \operatorname{Dom} f$, 都滿足

$$0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x,y) - L| < \epsilon,$$

則稱 f 在 (x_0, y_0) 處的極限值爲 L, 記爲

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \text{。}$$

(2) 若 f 爲 n 變數函數, 則 $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L$ 表示 $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得對所有 $\mathbf{x} \in \operatorname{Dom} f$, 都滿足

$$0 < |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(\mathbf{x}) - L| < \epsilon \text{。}$$

註 14.3.2. (1) 在 $\mathbb{R}^n$ 中, $\mathbf{a} = \langle a_1, \cdots, a_n \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, \cdots, b_n \rangle$, 則其距離定義爲

$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \sqrt{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2 + \cdots + (a_n-b_n)^2} \text{。}$$

(2) 集合 $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta\}$ 稱爲以 $\mathbf{a}$ 爲球心, δ 爲半徑之球, 記作 $B(\mathbf{a}, \delta)$。

(3) $B(\mathbf{a}, \delta) - \{\mathbf{a}\}$ 稱爲去心球, 記作 $B'(\mathbf{a}, \delta)$。

性質 14.3.3. 若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ 且 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = M$, 則

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y) \pm g(x,y)) = L \pm M$。

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)g(x,y) = LM$。

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} kf(x,y) = kL$。

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = \dfrac{L}{M}$, 若 $M \neq 0$。

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)^{\frac{r}{s}} = L^{\frac{r}{s}}$, 其中 r, s 爲互質的整數, $s \neq 0$, 且若 s 爲偶數, 則設 $L > 0$。

例 14.3.4. 求下列各極限值:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{x^2 - xy + 3}{x^2y + 5xy - y^3}$。

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(3,-4)} \sqrt{x^2 + y^2}$。

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$。

決定極限值

註 14.3.5. (1) 在單變數函數時, $f(x)$ 在 $x = a$ 的極限存在, 其充要條件爲沿著右側逼近的 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 以及沿著左側逼近的 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ 均存在且相等。

(2) 在多變數時, 則不只有兩個方向。考慮 $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x})$, 必須是沿著任何通過 $\mathbf{p}$ 之曲線逼近 $\mathbf{p}$ 時, 其極限均存在, 且都相等。

(3) 因此在 $\mathbb{R}^2$ 上, 考慮 $(x,y)\to(a,b)$。若沿著路徑 (path) C_1 時, $f(x,y)\to L_1$; 而 沿著路徑 C_2 時, $f(x,y)\to L_2$, 但 $L_1\neq L_2$, 則 $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ 不存在。

例 14.3.6. 討論下列各極限值:

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$。

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$。

(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$。

(4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$。

(5) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy-x-y+1}{x^2+y^2-2x-2y+2}$。

(6) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$。

(7) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+\sin^2 y}{x^2+2y^2}$。

(8) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\sin^2 y}{x^2+2y^2}$。

(9) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy+yz}{x^2+y^2+z^2}$。

(10) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy+yz^2+xz^2}{x^2+y^2+z^4}$。

(11) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos\sqrt{|xy|}}{|xy|}$。

例 14.3.7. 令 $f(x,y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$。

(a) 求 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)$。

(b) 求 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$。

例 14.3.8. 就不同的 r 值討論 $f(x,y)=\begin{cases} \frac{(x+y+z)^r}{x^2+y^2+z^2} & (x,y)\neq(0,0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0,0) \end{cases}$ 在原點的極限。

14.3.9. 由極座標求極限: 若對任意 $\epsilon>0$, 均存在 $\delta>0$ 使得

$$|f(r,\theta)-L|<\epsilon,\quad \forall\, 0<r<\delta, \forall\,\theta,$$

則 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=L$。

例 14.3.10. 討論下列各極限值:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$。

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$。

<u>連續性</u>

定義 14.3.11. (1) $f(x,y)$ 若滿足下列條件:

(i) f 在 (x_0,y_0) 有定義,

(ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 存在,

(iii) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$,

則稱 f 在 (x_0,y_0) 連續。

(2) 若 f 在 D 上每一點都連續, 則稱 f 在 D 上連續。

(3) 若 f 在定義域上每一點均連續, 則稱 f 爲連續函數。

定義 14.3.12. (1) 若 $f(x,y)$ 是有限個 cx^my^n 之和, 則稱 f 爲多項式函數 (polynomial function)。

(2) 若 f 是兩多項式相除, 則稱爲有理函數 (rational function)。

註 14.3.13. (1) 多項式函數爲連續函數。

(2) 有理函數在其定義域上連續。

例 14.3.14. 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \left(x^2y^3-x^3y^2+3x+2y\right)$。

例 14.3.15. 討論 $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ 之連續性。

例 14.3.16. 證明 $f(x,y)=\begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ 在原點以外都連續。

例 14.3.17. 討論 $f(x,y)=\begin{cases} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ 之連續性。

性質 14.3.18. 若 f 在 (x_0,y_0) 連續, g 爲單變數函數且在 $f(x_0,y_0)$ 連續, 則 $h=g\circ f$ 在 (x_0,y_0) 連續。

例 14.3.19. 討論 $f(x,y)=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ 之連續性。

14.4 偏導數 (Partial Derivatives)

定義

定義 14.4.1. (1) 若 $(a,b)\in \operatorname{Dom} f$, 則 f 在 (a,b) 對 x 的偏導數 (parital derivative) 為

$$f_x(a,b)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h};$$

對 y 的偏導數為

$$f_y(a,b)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k},$$

若右式的極限存在。

(2) 對所有 x-偏導數存在之點 (x_0,y_0), 可定義一個函數 $f_x(x,y)$, 其對應為 $(x_0,y_0)\mapsto f_x(x_0,y_0)$, f_x 稱為 f 的 x-偏導函數。同理, 對應 $(x_0,y_0)\mapsto f_y(x_0,y_0)$ 的函數 $f_y(x,y)$ 稱為 f 的 y-偏導函數。

符號 14.4.2. 若 $z=f(x,y)$, 則

$$\begin{aligned}
f_x(x,y)&=\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=f_x=z_x=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x}=D_xf,\\
\frac{d}{dx}f(x,y_0)\Big|_{x=x_0}&=f_x(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}=\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}。
\end{aligned}$$

對 y 的偏微分也相同。

例 14.4.3. (1) 令 $f(x,y)=x^3y^2$, 求 $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$。

(2) 令 $f(x,y)=x^3+x^2y^3-2y^2$, 求 $f_x(2,1)$ 及 $f_y(2,1)$。

例 14.4.4. (1) 令 $f(x,y)=\frac{2y}{y+\cos x}$, 求 f_x 及 f_y。

(2) 令 $f(x,y)=\sin\frac{x}{1+y}$, 求 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial f}{\partial y}$。

例 14.4.5. 若 $f(x,y)=x(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}e^{\sin(x^2y)}$, 求 $f_x(1,0)$。

定義 14.4.6. 若 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 為 n 變數函數, 則對變數 x_i 的偏微分定義為

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1,\cdots,x_{i-1},x_i+h,x_{i+1},\ldots,x_n)-f(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{h},$$

記為

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i}=f_{x_i}=f_i=D_if。$$

例 14.4.7. (1) 令 $f(x,y,z)=x\sin(y+3z)$, 求 $\frac{\partial f}{\partial z}$。

(2) 若 $f(x,y,z)=e^{xy}\ln z$, 求 f_x,f_y,f_z。

例 14.4.8. 電阻的並聯滿足 $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}$。在 $R_1=30,R_2=45,R_3=90$ 時, 求 $\frac{\partial R}{\partial R_2}$。

例 14.4.9. 若 $z=f(x,y)$ 滿足 $yz-\ln z=x+y$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$。

幾何意義

14.4.10. 偏導數 $f_x(a,b)$ 的幾何意義: 三維空間中的曲面 $z=f(x,y)$ 與平行於 xz-平面的截面 $y=b$ 交於一曲線 $g(x)=f(x,b)$, 則曲線在 $x=a$ 的斜率爲 $g'(a)=f_x(a,b)$。

例 14.4.11. 令 $f(x,y)=4-x^2-2y^2$, 求 $f_x(1,1)$ 及 $f_y(1,1)$, 並解釋其幾何意義。

例 14.4.12. 平面 $x=1$ 與曲面 $z=x^2+y^2$ 交成一拋物線, 求它在 $(1,2,5)$ 的切線斜率。

例 14.4.13. (可偏微分, 但不連續。) 令 $f(x,y)=\begin{cases} 0 & xy\neq 0 \\ 1 & xy=0。\end{cases}$

(a) 當 (x,y) 沿著直線 $y=x$ 逼近 $(0,0)$ 時, 求 $f(x,y)$ 的極限。

(b) 證明 f 在原點不連續。

(c) 證明 $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ 及 $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ 均存在。

14.5 高階偏導數

定義 14.5.1. 若 $f(x,y)$ 可偏微, 且其一階偏導數 f_x, f_y 均可偏微, 則 f 的各二階偏導數定義爲:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)。$$

符號 14.5.2. 令 $z=f(x,y)$, 則:

$$\begin{aligned}
f_{xx}=(f_x)_x&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\\
f_{yy}=(f_y)_y&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\\
f_{xy}=(f_x)_y&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x},\\
f_{yx}=(f_y)_x&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}。
\end{aligned}$$

例 14.5.3. 令 $f(x,y)=x\cos y+ye^x$, 求 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$。

Clairaut 定理

定理 14.5.4. (Clairaut) 令 $f(x,y)$ 爲定義在 D 上的函數, 且 $(a,b)\in D$。若 f 及 f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} 在 D 上均爲連續, 則 $f_{xy}(a,b)=f_{yx}(a,b)$。

例 14.5.5. 令 $z=xy+\frac{e^y}{y^2+1}$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

註 14.5.6. (1) 高階偏導數亦可定義, 例如

$$f_{xyy}=(f_{xy})_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)=\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial y\partial x}。$$

(2) 若各偏導數均連續, 則 $f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$。

例 14.5.7. (1) 令 $f(x, y, z) = 1 - 2xy^2z + x^2y$, 求 f_{xyz}。

(2) 若 $f(x, y, z) = \sin(3x + yz)$, 求 f_{xxyz}。

例 14.5.8. (Clairaut 定理之反例) 令 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$ 求 $f_{xy}(0, 0)$ 及 $f_{yx}(0, 0)$。

例 14.5.9. 令 $f(x, y) = \begin{cases} x^2 \tan^{-1} \frac{y}{x} - y^2 \tan^{-1} \frac{x}{y} & x \neq 0, y \neq 0 \\ 0 & x = 0 \text{ 或 } y = 0。\end{cases}$

(a) 證明 $f(x, y)$ 是連續函數

(b) 求 $f_{xy}(0, 0)$ 及 $f_{yx}(0, 0)$。

定義 14.5.10. (1) 偏微分方程 (partial differential equation) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, 稱爲 Laplace 方程, 而其解稱爲調和函數 (harmonic function)。

(2) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 稱爲波方程 (wave equation), 其解稱爲波函數 (wave function), 可用來表示小提琴之弦的振動。

例 14.5.11. (1) 證明 $u(x, y) = e^x \sin y$ 滿足 Laplace 方程。

(2) 證明 $u(x, t) = \sin(x - ct)$ 滿足波方程。

例 14.5.12. Cobb 及 Dauglas 作了以下假設:

(i) 若勞動力或資本減少, 則生產量也會減少。

(ii) 勞動力的邊際產量與每單位勞動力的生產量成正比。

(iii) 資本的邊際產量與每單位資本的生產量成正比。

(iv) 假設勞動力及資本均增爲 m 倍, 則產量亦增爲 m 倍。

由以上個四條件, 可推出 Cobb-Douglas 生產函數。

14.6 切平面 (Tangent Planes)

定義 14.6.1. (1) 設 $z = f(x, y)$ 有連續的一階偏導函數, 曲面 S 爲其圖形, 且 $P(x_0, y_0, z_0) \in S$。令平面 $y = y_0$ 及 $x = x_0$ 在 C 上的截線爲 C_1 及 C_2, 且在 C_1 及 C_2上, 通過 P 的切線分別爲 T_1 及 T_2, 則在 S 上, 通過 P 點的**切平面** (tangent plane) 爲包含 T_1 及 T_2 之平面。

(2) 在 P 點的法線(normal line) 爲通過 P 且與切平面垂直的直線。

定理 14.6.2. (1) 若 f 有連續的偏導函數, 則曲面 $z = f(x, y)$ 在點 $P(x_0, y_0, z_0)$ 之切平面爲

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)。$$

(2) 在 P 點之法線爲 $\begin{cases} x = x_0 + f_x(P)t \\ y = y_0 + f_y(P)t \quad t \in \mathbb{R}。\\ z = z_0 - t, \end{cases}$

例 14.6.3. (1) 求 $z = 2x^2 + y^2$ 在 $(1, 1, 3)$ 的切平面及法線。

(2) 求曲面 $z = x\cos y - ye^x$ 在 $(0, 0, 0)$ 的切平面。

例 14.6.4. 一顆子彈從點 $(\frac{5}{2}, 4, -\frac{7}{4})$, 以 $-\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ 的速度射出, 擊中曲面 $z = x^2 + y^2$ 並反彈。求反彈後的速度。

14.7 線性估計 (Linear Approximation)

定義 14.7.1. (1) 給定 $z = f(x, y)$, 則

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

稱爲 f 在 (a, b)的線性化 (linearization)。

(2) $f(x, y) \approx f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$ 稱爲 f 在 (a, b) 的線性估計 (linear approximation)。

例 14.7.2. 求 $f(x, y) = x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + 3$ 在 $(3, 2)$ 的線性化。

例 14.7.3. 利用下表, 求:

(a) 在 T 接近 96°F, H 接近 60% 時的線性估計。

(b) 估計 $T = 97$°C 及 $H = 58\%$ 時的濕度指數 (humidinex)。

定理 14.7.4. (標準線性估計的誤差) 在一個包含 (x_0, y_0) 的矩形 R 上, 若 f 的一階及二階偏導函數均爲連續, 且 M 爲 $|f_{xx}|$, $|f_{xy}|$ 及 $|f_{yy}|$ 在 R 的上界, 則以線性化 $L(x, y)$ 來估計 $f(x, y)$ 時, 在 R 上的誤差滿足 $|E(x, y)| \leq \frac{1}{2}M(|x - x_0| + |y - y_0|)^2$。

例 14.7.5. 以 $f(x, y) = x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + 3$ 在 $(3, 2)$ 之線性化來估計 $f(x, y)$, 則在區域 $R : |x - 3| \leq 0.1, |y - 2| \leq 0.1$ 的誤差對 $f(3, 2)$ 之百分比的上界爲何?

定義 14.7.6. 令 $z = f(x, y)$, 且 x 及 y 爲獨立變數。全微分 (total differential) 定義爲

$$dz = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy.$$

註 14.7.7. (1) 線性估計定理爲 $f(x, y) \approx f(a, b) + f_x(a, b)dx + f_y(a, b)dy = f(a, b) + dz$。

(2) 在多變數時, 仍有類似結果:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &\approx f(a, b, c) + f_x(a, b, c)(x - a) + f_y(a, b, c)(y - b) + f_z(a, b, c)(z - c), \\ \triangle w &= f(x + \triangle x, y + \triangle y, z + \triangle z) - f(x, y, z), \\ dw &= \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz。\end{aligned}$$

例 14.7.8. 設 $z = x^2 + 3xy - y^2$。

(a) 求 dz。

(b) 若 x 從 2 變爲 2.05, y 從 3 變爲 2.96, 比較 Δz 和 dz。

例 14.7.9. 測量直圓錐的底半徑及高之值分別爲 10 cm 及 25 cm, 但測量時可能分別有 0.1 cm 的誤差。則估計其體積時, 至多有多少誤差?

例 14.7.10. 在測量直圓柱容器之底半徑時, 誤差不超過 2%, 測量高時誤差不超過 0.5%, 估計在計算體積時, 可能產生的百分誤差。

例 14.7.11. 若某公司生產直圓柱形容器, 底半徑 5 ft, 高爲25 ft。則在半徑與底有小變化時, 體積變化的敏感度 (sensitive) 爲何? 若底半徑 25 ft, 高爲 5 ft。則體積變化的敏感度爲何?

例 14.7.12. 令 $f(x,y,z) = x^2 - xy + 3\sin z$。

(a) 求 $f(x,y,z)$ 在 $(2,1,0)$ 的線性化 $L(x,y,z)$。

(b) 在 $R : |x-2| \leq 0.01, |y-1| \leq 0.02, |z| \leq 0.01$ 上, 以 L 來估計 f, 求其誤差的上界。

例 14.7.13. 一立方體之三邊長測量分別爲 35 cm、60 cm 及 40 cm。每次測量可能誤差爲 0.2 cm。則估算體積時至多有多少誤差?

14.8 可微性(differentiablity)

定義 14.8.1. 給定 $z = f(x,y)$, 假設在包含 (a,b) 的一個開區域 D 上, f_x 及 f_y 均有定義。若

$$\triangle z = f_x(a,b)\triangle x + f_y(a,b)\triangle y + \epsilon_1 \triangle x + \epsilon_2 \triangle y,$$

且當 $(\triangle x, \triangle y) \to (0,0)$ 時, $\epsilon_1 \to 0$ 且 $\epsilon_2 \to 0$, 則稱 f 在 (a,b) 點可微 (differentiable)。

[註] 可微性質可改用以下等價的方式定義。若

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\Delta z - f_x(a,b)\Delta x - f_y(a,b)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0,$$

則稱 f 在 (a,b) 可微。

例 14.8.2. 由上述定義證明 $f(x,y) = xy - 5y^2$ 可微。

<u>可微與連續</u>

定理 14.8.3. 若在 (a,b) 附近 f_x 及 f_y 存在, 且均在 (a,b) 連續, 則 f 在 (a,b) 可微。

定理 14.8.4. 若 $f(x,y)$ 在 (a,b) 可微, 則 f 在 (a,b) 連續。

<u>可微性</u>

例 14.8.5. 令 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ 。

(a) 求 $f_x(0,0)$ 及 $f_y(0,0)$ 。

(b) 證明 f_x 及 f_y 不連續。

(c) 求 $f(x,y)$ 在原點的線性估計。

(d) 證明 $f(x,y)$ 在原點不可微。

例 14.8.6. (a) 證明 $f(x,y) = xe^{xy}$ 在 $(1,0)$ 可微。

(b) 求其線性化。

(c) 估計 $f(1.1,-0.1)$。

例 14.8.7. 令 $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$。

(a) 求 $f_x(0,0)$ 及 $f_y(0,0)$ 。

(b) 證明 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不可微。

例 14.8.8. 令 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$。

(a) 求 $f_x(0,0)$ 及 $f_y(0,0)$ 。

(b) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 是否可微?

14.9 連鎖法則 (Chain Rules)

定理 14.9.1. (連鎖律之一)

(1) 若 $z = f(x,y)$ 爲可微函數, 且 $x = g(t)$ 及 $y = h(t)$ 均爲 t 的可微函數, 則 z 是 t 的可微函數, 且

$$\frac{df}{dt} = f_x(x(t),y(t)) \cdot x'(t) + f_y(x(t),y(t)) \cdot y'(t) \text{ 或 } \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}。$$

(2) 在 t_0 的導數爲 $\frac{dw}{dt}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{dy}{dt}(t_0)$。

例 14.9.2. 一 mole 的理想氣體, 其壓力, 體積, 溫度之關係爲 $PV = 8.31T$。當溫度爲 300 K 時, 且以 0.1 K/s 之速率上升; 體積在 100 L 時, 以 0.2 L/s 之速度膨脹, 則壓力變化率如何?

例 14.9.3. 求 $w = xy$ 沿著路徑 $x = \cos t$, $y = \sin t$ 對 t 的導函數。在 $t = \frac{\pi}{2}$ 時的導數爲何?

例 14.9.4. 令 $T(x,y) = x^2y + 3xy^4$ 爲溫度函數。若沿著曲線 $x = \sin 2t$,$y = \cos t$ 移動, 求在 $(0,1)$ 點時溫度的變化率。

定理 14.9.5. (連鎖律之二) 若 $z = f(x,y)$ 爲可微函數, $x = g(s,t)$,$y = h(s,t)$ 爲可微函數, 則

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}, \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}。 \end{aligned}$$

例 14.9.6. (1) 令 $z = e^x \sin y$, $x = st^2$, $y = s^2t$。求 $\frac{\partial z}{\partial s}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial t}$。

(2) 令 $w = x^2 + y^2$, $x = r - s$, $y = r + s$。求 $\frac{\partial w}{\partial r}$ 及 $\frac{\partial w}{\partial s}$。

定理 14.9.7. (連鎖律) 若 u 為 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的可微函數, 每個 x_j 是 $t_1, t_2, \ldots, t_m$ 的可微函數, 則 u 是 $t_1, t_2, \ldots, t_m$ 的可微函數, 且

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}。$$

註 14.9.8. (1) 若 $w = f(x)$, $x = g(r,s)$, 則 $\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{dw}{dx}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}$ 且 $\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{dw}{dx}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}$。

(2) 令 $w = f(x,y,z)$, $x = g(r,s)$, $y = h(r,s)$, $z = k(r,s)$。假設四個函數均可微, 則 w 可偏微, 且 $\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}$, $\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$。

例 14.9.9. 令 $w = f(x,y,z,t)$。若 $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$, $t = t(u,v)$, 寫出其連鎖律。

例 14.9.10. (1) 令 $w = xy + z$, $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$。求 $\frac{dw}{dt}$ 及 $\frac{dw}{dt}|_{t=0}$。

(2) 若 $w = x + 2y + z^2$, $x = r/s$, $y = r^2 + \ln s$, $z = 2r$, 求 $\frac{\partial w}{\partial r}$, $\frac{\partial w}{\partial r}(2,e)$, 及 $\frac{\partial w}{\partial s}$。

(3) 令 $u = x^4y + y^2z^3$, 其中 $x = rse^t$, $y = rs^2e^{-t}$, $z = r^2s\sin t$。求 $\frac{\partial u}{\partial s}|_{(r,s,t)=(2,1,0)}$。

例 14.9.11. 若 $g(s,t) = f(s^2 - t^2, t^2 - s^2)$ 且 f 為可微, 證明 g 可滿足 $t\frac{\partial g}{\partial s} + s\frac{\partial g}{\partial t} = 0$。

例 14.9.12. 若 $z = f(x,y)$ 有連續的二階偏導函數, 且 $x = r^2 + s^2$, $y = 2rs$。求 $\frac{\partial z}{\partial r}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}$。

例 14.9.13. 若 $z = f(x,y)$, 且 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, 則 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}$

例 14.9.14. 若 $z = f(x,y)$, 且 $x = g(s,t), y = h(s,t)$, 則

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}。$$

例 14.9.15. 設 $f_x(0,0) = 2$, $f_y(0,0) = 3$。又設 $y = g(x)$ 滿足 $f(x, y^2 + y) = 0$ 且 $g(0) = 0$。求 $g'(0)$。

例 14.9.16. 一函數滿足 $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$, 則稱為 n 次的齊次函數 (homogeneous of degree n)。

(a) 證明它滿足 $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf(x,y)$。

(b) 證明它滿足 $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^f}{\partial y^2} = n(n-1)f(x,y)$。

14.10 隱函數微分 (Implicit Differentiation)

定理 14.10.1. (隱函數定理, Implicit Function Theorem) 若 $F(x,y)$ 定義在 包含 (a,b) 的一開盤 D 上, 其中 $F(a,b) = 0$, $F_y(a,b) \neq 0$ 且 F_x 及 F_y 在 D 上連續, 則在 (a,b) 的附近, 可以利用 $F(x,y) = 0$ 將 y 定義成 x 的可微函數, 且

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}, \quad \frac{dy}{dx}\bigg|_{(a,b)} = -\frac{F_x(a,b)}{F_y(a,b)}。$$

定理 14.10.2. (隱函數定理之二) 若 $F(x,y,z)$ 定義在包含 (a,b,c)之球 B 上, 且 $F(a,b,c)=0$, $F_2(a,b,c)\neq 0$, 在 B 上, F_x、F_y、F_z 均為連續, 則在 (a,b,c) 的附近, 利用 $F(x,y,z)=0$, z 可以定義成 x 和 y 的可微函數, 且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}。$$

例 14.10.3. (1) 若 $x^3+y^3=6xy$, 求 $\frac{dy}{dx}$。

(2) 若 $x^3+y^3+z^3+6xyz=1$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$。

(3) 若 $xy^2-y\cos z+xe^z=0$, 求 $\frac{\partial y}{\partial z}$。

例 14.10.4. 若 x,y 滿足 $F(x,y)=0$, 其中 F 可微, 且有連續的二階導函數。設 $F_y\neq 0$, 證明 $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{F_{xx}F_y^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x^2}{F_y^3}$。

例 14.10.5. (1) 若 u,v 視為 x,y,z 的函數, 它們滿足 $\begin{cases}u^3+v^3+x^3-3y=0\\ u^2+y^2+z^2+2x=0\end{cases}$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial v}{\partial x}$ 。

(2) 若 z,u,v 視為 x,y 的函數, 它們滿足 $\begin{cases}z=uv\\ u^2-v+x=0\\ u+v^2-y=0\end{cases}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial v}$ 。

14.11 方向導數 (Directional Derivatives)

定義 14.11.1. 若 $f(x,y)$ 在 xy-平面上的區域 R 有定義, $P_0(x_0,y_0)\in R$, $\mathbf{u}=(u_1,u_2)$ 為單位向量, 若極限

$$\lim_{s\to 0}\frac{f(x_0+su_1,y_0+su_2)-f(x_0,y_0)}{s}$$

存在, 則將其記為 $(D_{\mathbf{u}}f)(P_0)$, 稱為 $f(x,y)$ 在 P_0 沿著 $\mathbf{u}$ 方向的方向導數 (directional derivative)。

[註] $f_x=D_{\mathbf{i}}f$, $f_y=D_{\mathbf{j}}f$。

例 14.11.2. 利用下面等溫線圖估計, 氣溫函數在重慶沿著西南方向之方向導數。

定理 14.11.3. 若 f 是 x,y 的可微函數, 則 f 沿著單位向量 $\mathbf{u}=\langle a,b\rangle$ 的方向導數為 $D_{\mathbf{u}}f(x,y)=f_x(x,y)\,a+f_y(x,y)\,b$。

例 14.11.4. (1) 求 $f(x,y)=x^2+xy$ 在 $P_0(1,2)$ 沿著 $\mathbf{u}\langle\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\rangle$ 的方向導數。

(2) 若 $f(x,y)=x^3-3xy+4y^2$, $\mathbf{u}$ 是角度為 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 的單位向量, 求 $D_{\mathbf{u}}f(1,2)$。

(3) 求 $f(x,y)=xe^y+\cos xy$ 在 $(2,0)$ 點, 沿著 $\mathbf{v}=\langle 3,-4\rangle$ 方向的方向導數。

例 14.11.5. 令 $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$ 。

(a) 證明 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 連續。

(b) 求 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的所有方向導數。

定義 14.11.6. $f(x,y)$ 的二階方向導函數爲 $D_{\mathbf{u}}^2 f(x,y) = D_{\mathbf{u}}[D_{\mathbf{u}} f(x,y)]$ 。

例 14.11.7. (1) 若 $\mathbf{u} = \langle a, b\rangle$ 是單位向量, $f(x,y)$ 有連續的二階偏導函數, 則 $D_{\mathbf{u}}^2 f = f_{xx}a^2 + 2f_{xy}ab + f_{yy}b^2$。

(2) 求 $f(x,y) = xe^{2y}$ 沿著 $\mathbf{v} = \langle 4, 6\rangle$ 的二階方向導數。

(3) 若 $\mathbf{u} = \langle \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\rangle$, 求 $D_{\mathbf{u}} D_{\mathbf{v}} f(x,y)$.

14.12 梯度 (Gradients)

定義

定義 14.12.1. (1) $f(x,y)$ 在 $P(a,b)$ 的梯度向量 (gradient vector) 爲 $\nabla f(P) = \langle \frac{\partial f}{\partial x}(P), \frac{\partial f}{\partial y}(P)\rangle$。
(2) f 的梯度函數 (gradient) 是向量值函數 $\nabla f(x,y) = \langle f_x(x,y), f_y(x,y)\rangle$。

定理 14.12.2. 若 $f(x,y)$ 在一個包含 $P(a,b)$ 的開區域上可微, 則 $D_{\mathbf{u}} f(P) = (\nabla f)(P) \cdot \mathbf{u}$。

性質 14.12.3. $\nabla(kf) = k\nabla f$, $\nabla(f \pm g) = \nabla f \pm \nabla g$, $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$, $\nabla(f/g) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$。

例 14.12.4. 若 $f(x,y) = \sin x + e^{xy}$, 求 ∇f 及 $\nabla f(0,1)$。

例 14.12.5. 求 $f(x,y) = x^2y^3 - 4y$ 在點 $(2,-1)$ 沿著 $\langle 2, 5\rangle$ 方向的方向導數。

註 14.12.6. (1) 在多變數時,$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}_0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{h}$。

(2) 若 $w = f(x,y,z)$, 則 $\nabla f = \langle f_x, f_y, f_z\rangle$, $D_{\mathbf{u}} f(x,y,z) = \nabla f(x,y,z) \cdot \mathbf{u}$。

例 14.12.7. 令 $f(x,y,z) = x \sin yz$

(a) 求 $f(x,y,z)$ 的梯度。

(b) 求 f 在 $(1,3,0)$ 沿著 $\mathbf{v} = \langle 1, 2, -1\rangle$ 的方向導數。

變化率

定理 14.12.8. (1) 若 $P \in \operatorname{Dom} f$, 則 $f(x,y)$ 在 P 點沿著 $\nabla f(P)$ 的方向增加最快, 且變化率爲 $D_{\mathbf{u}} f(P) = |\nabla f(P)|$。

(2) $f(x,y)$ 在 P 點沿著 $-\nabla f(P)$ 的方向減少最快, 且 $D_{\mathbf{u}}(P) = -|\nabla f(P)|$。

(3) 若 $\nabla f(P) \neq 0$, 且 $\mathbf{u}$ 垂直於 $\nabla f(P)$, 則 $f(x,y)$ 在 P 點沿著此方向的變化率爲 0。

例 14.12.9. (a) 若 $f(x,y) = xe^y$, 求 f 在 $P(2,0)$ 指向 $Q\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ 方向的方向導數。

(b) 在 $P(2,0)$ 沿著那個方向變化爲大? 變化量多少?

例 14.12.10. 令 $f(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$。求 $f(x,y)$ 在 $P(1,1)$ 增加最快的方向, 減少最快的方向, 變化率爲 0 的方向。

例 14.12.11. 在 (x,y,z) 的溫度爲 $T(x,y,z)=\frac{80}{1+x^2+2y^2+3z^2}$。在點 $(1,1,-2)$ 沿著那個方向溫度增加最快?

例 14.12.12. 求 $f(x,y,z)=x^3-xy^2-z$ 在點 $P(1,1,0)$ 沿著 $\mathbf{v}=\langle 2,-3,6\rangle$ 方向的方向導數。它在 P 沿著哪個方向變化量增加最快, 其變化率爲何?

例 14.12.13. (a) 求所有點使函數 $f(x,y)=x^2+y^2-2x-4y$ 在該點的變化最快的方向爲 $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ 。

(b) 求所有點使函數 $f(x,y)=x^2+y^2-2x-4y$ 在該點的增加最快的方向爲 $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ 。

例 14.12.14. 令 $z=f(x,y)$ 是由方程式 $\sin(x+y)+\sin(y+z)+\sin(z+x)=0$ 所定義, 則在點 (π,π) 沿著那個方向變化最大?

<u>等值曲面的切平面</u>

定理 14.12.15. 令 $f(x,y,z)$ 爲可微函數, S 爲 $f(x,y,z)$ 的一個等值曲面, $P(a,b,c)\in S$。若 C 爲 S 上通過 P 的任一曲線, 則 $\nabla f(P)$ 在 P 點垂直於 C。

定義 14.12.16. (1) 等值曲面 $S: f(x,y,z)=c$ 上的一點 P, $\nabla f(P)$是 S 在 P 點的法向量。

(2) *切平面* (tangent plane) 是通過 P 且與 $\nabla f(P)$ 垂直的平面。

(3) 其法線 (normal line) 是通過 P 且與 $\nabla f(P)$ 同向的直線。

註 14.12.17. 令 S 爲 $f(x,y,z)$ 的一個等值曲面, $P(a,b,c)\in S$。

(1) S 在 P 的切平面爲 $f_x(P)(x-a)+f_y(P)(y-b)+f_z(P)(z-c)=0$。

(2) 其法線爲 $\begin{cases} x=x_0+f_x(P)t \\ y=y_0+f_y(P)t \\ z=z_0+f_z(P)t。\end{cases}$

例 14.12.18. 求橢圓 $\frac{x^2}{4}+y^2=2$ 在點 $(-2,1)$ 的切線方程式。

例 14.12.19. (1) 求曲面 $\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}=3$ 在 $(-2,1,-3)$ 之切平面及法線方程式。

(2) 求曲面 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z-9=0$ 在 $P(1,2,4)$ 之切平面及法線方程式。

例 14.12.20. 求曲面 $x^2+4y^2-z^2=4$ 上一點, 使其切平面平行於 $2x+2y+2=5$。

例 14.12.21. 過曲面 $z=x^2+y^2$ 上之點 $(1,1,2)$ 的法線交曲面於另一點, 該點爲何?

例 14.12.22. 曲面 S 上有兩條曲線 $\mathbf{r}_1(t)=\langle 2+3t,1-t^2,3-4t+t^2\rangle$ 及 $\mathbf{r}_2(u)=\langle 1+u^2,2u^3-1,2u+1\rangle$, 求 S 上過點 $(2,1,3)$ 的切平面 。

例 14.12.23. (1) 曲面 $x^2+y^2-2=0$ 及 $x+z-4=0$ 相交成一橢圓 E, 求 E 上之點 $P(1,1,3)$ 之切線的參數式。(兩種解法)

(2) 曲面 $x^3+3x^2y^2+y^3+4xy-z^2=0$ 及 $x^2+y^2+z^2=11$ 相交成一曲線 C, 求 C 上之點 $P(1,1,3)$ 之切線的參數式。

例 14.12.24. (1) 證明: 曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{c}$ 上任一點之切平面的 x-, y- 及 z-截距和爲一常數。

(2) 過曲面 $xyz = 1$ 上在第一卦限的任一點, 其切平面與座標面圍成四面體, 證明其體積爲一常數。

例 14.12.25. 考慮半徑爲 5, 軸爲 z-軸之直圓柱, 令 $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2) + z$, 求 f 在圓柱上之點 $(3, -4, 4)$ 沿著 法向的變化率。

例 14.12.26. 令 $f(x, y) = \int_{xy}^{6+\frac{y}{x}} \sqrt{1 + t^3} dt$。

(a) 求在點 $P(2, 4)$ 指向點 $Q(9, 28)$ 之方向的變化率。

(b) 在點 P 沿著那個方向變化最大?

(c) 求曲面 $S : z = f(x, y)$ 在點 $(2, 4, 0)$ 的切平面及法線方程式。

(d) 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 20$ 與 S 交一曲線 C, 求 C 在 $(2, 4, 0)$ 的切線方程式。

14.13 局部極值 (Relative Extrema)

定義 14.13.1. (1) 令 R 爲 xy-平面上的區域, $P = (a, b)$ 爲 R 上一點。如果存在一個以 P 爲圓心的圓盤 $D = \{(x, y) | (x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2\}$, 使 $D \subset R$, 則稱 P 爲 R 的內點 (interior point)。

(2) 如果任何以 P 爲圓心的圓盤, 均包含 R 的點, 也包含 R 外面的點, 則稱 P 爲邊界點 (boundary point)。

(3) 所有 R 的內點構成 R 的內部 (interior), 所有邊界點構成 R 的邊界 (boundary)。

(4) 若 R 上的點均爲內點, 則稱爲開集 (open set), 若 R 包含所有的邊界點, 則稱爲 閉集 (closed set)。

(5) 若 R 包含在某個圓盤內, 則稱 R 爲有界集 (bounded set), 否則稱爲無界 (unbounded)。

定義 14.13.2. 令 $f(x, y)$ 定義在包含 (a, b) 之區域 R 上。

(1) 若存在一個以 (a, b) 爲圓心的開盤 D 上, 對所有 $(x, y) \in D \cap \mathrm{Dom}\, f$, 均有 $f(x, y) \geq f(a, b)$, 則稱 $f(a, b)$ 爲局部極小值。

(2) 若存在一個以 (a, b) 爲圓心的開盤 D 上, 對所有 $(x, y) \in D \cap \mathrm{Dom}\, f$, 均有 $f(x, y) \leq f(a, b)$, 則稱 $f(a, b)$ 爲局部極大值。

(3) 若 $f(x, y) \leq f(a, b), \forall (x, y) \in \mathrm{Dom} f$, 則稱 f 在 (a, b) 有絕對極大值。

(4) 若 $f(x, y) \geq f(a, b), \forall (x, y) \in \mathrm{Dom} f$, 則稱 f 在 (a, b) 有絕對極小值。

(5) 局部極小、極大值統稱爲相對極值 (relative extremum)。絕對極小、極大值統稱爲絕對極值 (absolute extremum)。

定理 14.13.3. 若 (a, b) 屬於 $f(x, y)$ 之定義域的內點, f 在 (a, b) 有相對極值, 且假設 $f(x, y)$ 在 (a, b) 的 一階偏導數存在, 則 $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$。

定義 14.13.4. 令 P 爲 $f(x, y)$ 之定義域的內點。若 $f_x(P) = f_y(P) = 0$, 或 $f_x(p)$ 及 $f_y(P)$ 中有一爲不存在, 則稱 P 爲 f 的臨界點 (critical point, stationary point)。

定義 14.13.5. 令 (a,b) 爲可微函數 $f(x,y)$ 的臨界點。假設在任何以 (a,b) 爲圓心的開盤中, 均有定義域上的點 (x_1,y_1) 使 $f(x_1,y_1)>f(a,b)$, 也有定義域上的點 (x_2,y_2) 使 $f(x_2,y_2)<f(a,b)$。則曲面 $z=f(a,b)$ 上的點 $(a,b,f(a,b))$ 稱爲鞍點 (saddle point)。

例 14.13.6. (1) 求 $f(x,y)=x^2+y^2$ 的局部極值。

(2) 討論 $f\left(x,y\right)=x^2+y^2-2x-6y+14$ 的極值。

(3) 討論 $f\left(x,y\right)=y^2-x^2$ 的極值。(此圖形爲鞍面。)

定理 14.13.7. (極值之二階導數判別法) 假設 f 之二階偏導數在以 $P\left(a,b\right)$ 爲圓心的某一圓盤上爲連續, 且 $f_x\left(P\right)=f_y\left(P\right)=0$。令 $D\left(P\right)=f_{xx}\left(P\right)f_{yy}\left(P\right)-f_{xy}^2\left(P\right)$。則

(a) 若 $D(P)>0$, 且 $f_{xx}\left(P\right)>0$, 則 $f\left(a,b\right)$ 爲局部極小值。

(b) 若 $D(P)>0$, 且 $f_{xx}\left(P\right)<0$, 則 $f\left(a,b\right)$ 爲局部極大直。

(c) 若 $D(P)<0$, 則 $f(a,b)$ 不爲極值。

[註]

(1) 在 (c) 的情形, P 爲鞍點 (saddle point)。

(2) 若 $D(P)=0$, 無法下結論。

(3) $D=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$ 稱爲 f 的判別式 (discriminant) 或 f 的 Hessian, $H(f)$。

例 14.13.8. 令 $f(x,y)=x^2+4y^2+2-4xy$, 證明在所有臨界點上均有極小值。

例 14.13.9. (1) 求 $f(x,y)=xy-x^2-y^2-2x-2y+4$ 的局部極值。

(2) 求 $f(x,y)=(x-y)(1-xy)$ 的局部極值。

(3) 求 $f(x,y)=y^3+3x^2y-6x^2-6y^2+2$ 的局部極值。

(4) 求 $f(x,y)=x^3-2x+xy^2+y+1$ 的局部極值。

(5) 討論 $f\left(x,y\right)=x^4+y^4-4x^2y+4y$ 的極值。

(6) 討論 $f\left(x,y\right)=10x^2y-5x^2-4y^2-x^4-2y^4$ 的極值, 此函數圖形的最高點爲何?

例 14.13.10. (1) 求 $f(x,y)=y^2-2y\cos x$,$0\le x\le 7$ 的局部極值。

(2) 求 $f(x,y)=x^2ye^{-(x^2+y^2)}$ 的局部極值。

(3) 求 $f(x,y)=(5x+7y-25)e^{-(x^2+xy+y^2)}$ 的局部極值。

例 14.13.11. 求點 $(1,0,-2)$ 到平面 $x+2y+z=4$ 的最短距離。

例 14.13.12. 利用 12 m^2 的厚紙板製作一個立方體的盒子, 沒有頂蓋。求如此盒子的最大體積。

例 14.13.13. (最小平方法, least square method) 假設一個實驗所得數據爲 (x_1,y_1), (x_2,y_2), $\cdots,(x_n,y_n)$, 要求一直線 $y=mx+b$, 使得 $\sum_{i=1}^{n}(y_i-(mx_i-b))^2$ 爲最小。求 m 及 b 。

14.14 絕對極值 (Absolule Extrema)

定理 14.14.1. (極值定理, Extreme Value Theorem) 若 f 在一有界閉集 D 上連續, 則 f 在 D 上有絕對極大值 及絕對極小值。

註 14.14.2. 求絕對極值的步驟:

(i) 求 f 在 D 上的臨界點。

(ii) 求 f 在 D 之邊界上的極值。

(iii) 比較 (i) 及 (ii) 中之值的最大及最小者。

例 14.14.3. (1) 求 $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y$ 在矩形 $D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 2\}$ 上的極值。

(2) 令 $f(x,y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$, R 爲 $x = 0$, $y = 0$, $y = 9 - x$ 在第一象限所圍的三角形。求 $f(x,y)$ 在 R 上的最大和最小值。

(3) 令 D 爲 $x + y = \pi$ 及座標軸所圍成的區域, 求 $f(x,y) = \sin x \cos(x+y)$ 在 D 上的極值。

(4) 求 $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$ 在 $D = \{(x,y) \mid x \ge 0, y \ge 0, x^2 + y^2 \le 1\}$ 上的極值。

例 14.14.4. 一個貨運公司只接受立方體的盒子, 規定其高以及其圍長 (girth, 截面的周長) 的和不得超過 108 in。則如何之盒子體積最大? 體積是多少?

例 14.14.5. 一個矩形長爲 L, 寬爲 W。以兩條分別平行於長, 寬的直線, 將其分割爲"四"份, 則如何分 可使這些小矩形之面積的平方和爲最大和最小。

例 14.14.6. 令 $f(x,y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$。證明 $f(x,y)$ 有唯一的臨界點, 該點有局部極大值, 但它非絕對極大值。

14.15 Lagrange 乘數法 (Lagrange Multiplier)

例 14.15.1. (1) 求平面 $2x + y - z - 5 = 0$ 上, 與原點最靠近的點。

(2) 求雙曲柱面 $x^2 - z^2 = 1$ 上, 與原點最靠近的點。(兩種解法)

定理 14.15.2 (梯度垂直定理, The orthogonal gradient theorem)**.** 假設一區域 R, 其內點包含平滑曲線 $C : \mathbf{r}(t) = \langle g(t), h(t), k(t) \rangle$, 且 $f(x,y,z)$ 在 R 上可微。若考慮 f 在 C 上取值, 且 $f(P_0)$ 爲局部極值, 則在 P_0 點, ∇f 與 C 垂直。

推論 14.15.3. 在一平滑曲線 $\mathbf{r}(t) = \langle g(t), h(t) \rangle$ 上, 若 $f(x,y)$ 在點 P_0 爲局部極值, 則 $\nabla f(P) \cdot \mathbf{v} = 0$, 其中 $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}|_{P_0}$。

定理 14.15.4. (Largange Multiplier) 考慮曲面 $S = \{(x,y,z) \mid g(x,y,z) = k\}$, 假設在 S 上, $\nabla g \ne 0$, 且函數 $f(x,y,z)$ 在 S 上有極值 $f(a,b,c)$ 。則存在 λ 使得 $\nabla f(a,b,c) = \lambda \nabla g(a,b,c)$ 。

[註]

(1) 此法是線性規劃的推廣。

(2) λ 稱爲 Largange multiplier。

(3) 解聯立方程組 $\nabla f(x,y,z)=\lambda\nabla g(x,y,z)$ 及 $g(x,y,z)=k$, 其中最大的就是 f 的極大值, 最小的就是 f 的極小值。

例 14.15.5. (1) 求 $f(x,y)=xy$ 在橢圓 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$ 上的極大和極小值。

(2) 求 $f(x,y)=x^2+2y^2$ 在圓 $x^2+y^2=1$ 上的極值。

(3) 求 $f(x,y)=x^2+2y^2$ 在圓盤 $x^2+y^2\leq 1$ 上的極值。

例 14.15.6. (1) 求 $f(x,y)=2x+3y$ 在條件 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=5$ 下的極大和極小值。

(2) 求 $f(x,y)=x$ 在條件 $y^2+x^4-x^3=0$ 下的極大和極小值。

例 14.15.7. (1) 求 $f(x,y,z)=x^3-3y+3z^2$ 在 $x^2+y^2+2z^2=2$ 上的極值。

(2) 求 $f(x,y,z)=x^3y^3z^4$ 在 $xy+yz+zx=5,\ x,y,z\geq 0$ 上的極大值。

例 14.15.8. (1) 求 $f(x,y)=xy^2$ 在 $D=\{(x,y)|x\geq 0,y\geq 0,x^2+7xy+y^2\leq 45\}$ 上的最大值。

(2) 求 $f(x,y)=x^3+3x^2y$ 在 $D=\{(x,y)|x^2+4xy+5y^2\leq 5\}$ 上的極值。

(3) 求 $f(x,y,z)=xy+z^2$ 在球體 $x^2+y^2+(z-\frac{1}{2})^2\leq 1$ 上的極值。

例 14.15.9. 求在球 $x^2+y^2+z^2=4$ 上距離 $(3,1,-1)$ 最遠的點。

例 14.15.10. 以 12 m^2 之厚紙板製作無蓋之立方體盒子, 其最大體積爲何?

例 14.15.11. 在 $x^2+y^2+z^2=1$ 的條件之下, 求 $x^3+2xyz-z^2$ 的極大值和極小值。(取材自 Cox, Little & O'Shea, Ideals, Varieties, and Algorithms.。)

定理 14.15.12. 設 $f(x,y,z)$ 及 $g_1(x,y,z), g_2(x,y,z)$ 均爲可微。若在 $g_1(x,y,z)=g_2(x,y,z)=0$ 之條件下, $f(a,b,c)$ 爲局部極值, 則存在 λ,μ 使得 $\nabla f(a,b,c)=\lambda\nabla g_1(a,b,c)+\mu\nabla g_2(a,b,c)$。

例 14.15.13. 求 $f(x,y,z)=x+2y+3z$ 在 $x-y+z=1$ 及 $x^2+y^2=1$ 所交之曲線上的極值。

例 14.15.14. (1) 平面 $x+y+z=1$ 與 $x^2+y^2=1$ 交成一橢圓。求橢圓上與原點距離最遠及最近的點。

(2) 平面 $x+y+\sqrt{2}z=0$ 與 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{2}=1$ 交成一橢圓。求橢圓的面積。

(3) 平面 $4x-3y+8z=5$ 將錐面 $x^2+y^2=1$ 截出一橢圓。求橢圓上的最高點與最低點。

例 14.15.15. 一個立方體表面積爲 1500 cm^2, 所有稜邊總長爲 200 cm, 求最大體積與最小體積。

例 14.15.16. 空間中的溫度函數爲 $T(x,y,z)=x^2+y^2z+2x+4y+z$, 有一曲面 S 爲 $z=4-x^2-y^2$。則在曲面上的點 $P=(1,1,2)$ 沿著那個切線方向, 其溫度的變化率最大?

例 14.15.17. 圍住圓 $x^2+y^2=2x$ 的所有橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 中, 求 a,b 值使橢圓面積最小 。

例 14.15.18. 在曲面 $xy^2z^2=1$ 的所有切平面中, 何者與原點距離最遠?

14.16 兩變數的 Taylor 公式 (Taylor Polynomial in Two Variables)

定理 14.16.1 (雙變數函數的 Taylor 公式)**.** 假設 $f(x,y)$ 及它的所有 $n+1$ 階偏導函數均在一個包含 (a,b) 的開矩形 R 上連續, 則在 R 上,

$$\begin{aligned} f(a+h,b+k) =& f(a,b)+(hf_x+kf_y)|_{(a,b)}+\frac{1}{2!}(h^2f_{xx}+2hkf_{xy}+k^2f_{yy})|_{(a,b)}+ \\ & \frac{1}{3!}(h^3f_{xxx}+3h^2kf_{xxy}+3hk^2f_{xyy}+k^3f_{yyy})|_{(a,b)}+\cdots+ \\ & \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f|_{(a,b)}+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f|_{(a+ch,b+ck)}, \end{aligned}$$

其中 $0 \le c \le 1$。

例 14.16.2. 令 $f(x,y)=\sin x\sin y$。求 $f(x,y)$ 在原點的六次估計。在 $|x|\le 0.1$ 及 $|y|\le 0.1$ 時其誤差 上界爲何?

註 14.16.3. (1) 由二次 Taylor 公式可以證明極值之二階導數判別法。

(2) 由二次 Taylor 公式可以證明線性估計的誤差公式。