第 13 章

向量值函數 (Vector-Valued Functions)

目錄

13.1 向量值函數 (Vector-Valued Functions)

定義 13.1.1. (1) 一個函數 $\mathbf{r}: D \to \mathbb{R}^3$, 其中 D 為 $\mathbb{R}$ 上的集合, 則 $\mathbf{r}$ 稱為向量值函數 (vector-valued function)。

(2) 向量值函數可以表為 $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$, 其中 f, g, h 稱為 $\mathbf{r}$ 的分量函數 (component function)。

例 13.1.2. $\mathbf{r}(t) = \langle t^3, \ln(3-t), \sqrt{t}\rangle$, 求其定義域。

定義 13.1.3. 給定向量值函數 $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle$, 則 $\{(x, y, z) = (f(t), g(t), h(t)) | t \in \operatorname{Dom}\mathbf{r}\}$ 形成一空間曲線 (space curve) C, 其中 t 稱為 C 的參數 (parameter), 且此方程組稱為曲線 C 的參數化 (parametric equations)。

例 13.1.4. (1) 描述 $\mathbf{r}(t) = \langle 1+t, 5+2t, -1+6t\rangle$ 之圖形。

(2) 描述 $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, \sin 2t\rangle$ 之圖形。

(3) 描述曲線 $x = t\cos t, y = t\sin t, z = t$ 之圖形。

(4) 描述 $\mathbf{r}(t) = \langle \sin 3t\cos t, \sin 3t\sin t, t\rangle$ 之圖形。

例 13.1.5. (1) $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3\rangle$ 之圖形稱為三次撓線 (twisted cubic)。

(2) $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, t\rangle$ 之圖形稱為螺旋線 (helix)。

(3) $\mathbf{r}(t)=\langle(4+\sin 20t)\cos t,(4+\sin 20t)\sin t,\cos 20t\rangle$ 之圖形稱爲環狀螺線 (toroidal spiral)。

(4) $\mathbf{r}(t)=\langle(2+\cos 1.5t)\cos t,(2+\cos 1.5t)\sin t,\sin 1.5t\rangle$ 之圖形稱爲三葉草結線 (trefoil) knot)。

例 13.1.6. 求連接 $P(1,3,-2),Q(2,-1,3)$ 之直線的向量方程式及參數方程式。

例 13.1.7. (1) 求一個向量值函數, 使其圖形爲柱面 $x^2+y^2=1$ 與平面 $y+z=2$ 的交線。

(2) 求一個向量值函數, 使其圖形爲 $x^2+y^2+4z^2=4,y\geq 0$ 與平面 $x^2+z^2=1$ 的交線。

例 13.1.8. 兩粒子分別沿曲線 $\mathbf{r}_1(t)=\langle t,t^2,t^3\rangle$ 及 $\mathbf{r}_2(t)=\langle 1+2t,1+6t,1+14t\rangle$ 運動, 它們的軌跡是否相交? 兩粒子是否相撞?

13.2 向量值函數之極限與連續性

定義 13.2.1. (1) 令 $\mathbf{r}(t)=\langle f(t),g(t),h(t)\rangle$ 爲一向量值函數。若 $\forall\epsilon>0$, $\exists\delta>0$ 使得 $0<|t-a|<\delta\Rightarrow|\mathbf{r}(t)-\mathbf{v}|<\epsilon$, 則稱 $\mathbf{r}(t)$ 在 $t\to a$ 時的極限値爲 $\mathbf{v}$。記爲 $\lim\limits_{t\to a}\mathbf{r}(t)=\mathbf{v}$。

(2) 若 $\lim\limits_{t\to a}\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}(a)$, 其中 $a\in\operatorname{Dom}\mathbf{r}$, 則稱 $\mathbf{r}(t)$ 在 $t=a$ 連續。若 $\mathbf{r}$ 在定義域上的每一點均連續, 則稱它爲連續的向量值函數。

定理 13.2.2. (1) 若 $\mathbf{r}(t)=\langle f(t),g(t),h(t)\rangle$, 且各分量函數的極限存在, 則

$$\lim_{t\to a}\mathbf{r}(t)=\left\langle\lim_{t\to a}f(t),\lim_{t\to a}g(t),\lim_{t\to a}h(t)\right\rangle.$$

(2) $\mathbf{r}(t)=\langle f(t),g(t),h(t)\rangle$ 在 $t=a$ 連續的充要條件是 $f(t),g(t),h(t)$ 在 $t=a$ 均連續。

例 13.2.3. $\mathbf{r}(t)=\left\langle 1+t^3,te^{-t},\frac{\sin t}{t}\right\rangle$, 求 $\lim\limits_{t\to 0}\mathbf{r}(t)$。

例 13.2.4. $\mathbf{r}(t)=\langle\cos t,\sin t,\lfloor t\rfloor\rangle$ 在整數點不連續。

13.3 向量值函數的導函數

定義 13.3.1. (1) 給定向量值函數 $\mathbf{r}(t)=\langle f(t),g(t),h(t)\rangle$。若 f,g,h 在 $t=a$ 有導數, 則 $\mathbf{r}$ 在 $t=a$ 有導數, 且

$$\mathbf{r}'(a)=\frac{d\mathbf{r}}{dt}(a)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{r}(a+\Delta t)-\mathbf{r}(a)}{\Delta t}.$$

(2) 若 $\mathbf{r}(t)$ 在 $t=a$ 有導數, 則稱 $\mathbf{r}(t)$ 在 $t=a$ 可微。若 $\mathbf{r}$ 在定義域上 的每一點均可微, 則稱它是可微函數, 且其導函數爲 $\mathbf{r}'(t)$。

(3) 若 $\mathbf{r}'(a)\neq\mathbf{0}$, 則稱爲它爲曲線在 $P=\mathbf{r}(a)$ 的切向量 (tangent vector)。而通過 P 點且與 $\mathbf{r}'(a)$ 平行的直線則稱爲切線。

(4) 單位切向量 (unit tangent vector) 爲 $\mathbf{T}(t)=\frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$。

(5) 一參數曲線 $\mathbf{r}(t)$ 若滿足 $\mathbf{r}'(t)$ 爲連續, 且 $|\mathbf{r}'(t)|\neq 0,\forall t\in I$, 則稱它在 I 上爲平滑 (smooth)。

(6) 一曲線若在定義域範圍內均爲平滑, 則稱爲平滑曲線 (smooth curve)。

(7) 一曲線若爲有限個平滑曲線連接在一起, 則稱爲逐段平滑 (piecewise smooth)。

性質 13.3.2. 若 $\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)$ 爲可微的向量值函數, $f(t)$ 爲實值函數, $\mathbf{c}$ 爲常數向量, 則

(1) $\frac{d}{dt}\mathbf{c} = 0$。

(2) $\frac{d}{dt}[c\,\mathbf{u}(t)] = c\,\mathbf{u}'(t)$。

(3) $\frac{d}{dt}[f(t)\mathbf{u}(t)] = f'(t)\mathbf{u}(t) + f(t)\mathbf{u}'(t)$。

(4) $\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \pm \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \pm \mathbf{v}'(t)$。

(5) $\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t)$。

(6) $\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t)$。

(7) $\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(f(t))] = \mathbf{u}'(f(t)) \cdot f'(t)$。

(8) 若 $\mathbf{r}$ 是可微的向量值函數, 且其長度 $|\mathbf{r}|$ 爲常數, 則 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = 0$。

例 13.3.3. 證明 $\mathbf{r}(t) = \langle \sin t, \cos t, \sqrt{3} \rangle$ 與其導函數垂直。

例 13.3.4. $\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t^3, te^{-t}, \sin 2t \rangle$,

(a) 求其導函數。

(b) 求在 $t = 0$ 的單位切向量。

例 13.3.5. $\mathbf{r}(t) = \left\langle \sqrt{t}, 2 - t \right\rangle$, 求 $\mathbf{r}'(t)$, 並畫出 $\mathbf{r}(1)$ 及 $\mathbf{r}'(1)$。

例 13.3.6. 曲線之參數式爲 $x = 2\cos t, y = \sin t, z = t$, 求在點 $\left(0, 1, \frac{\pi}{2}\right)$ 之切線的參數式。

例 13.3.7. 曲面 $x^2 + y^2 = 25$ 與 $y^2 + z^2 = 20$ 交出一曲線, 求其在 (3,4,2) 之切線的向量方程。

例 13.3.8. 兩曲線 $\mathbf{r}_1(t) = \langle t, 1 - t, 3 + t^2 \rangle$ 及 $\mathbf{r}_2(s) = \langle 3 - s, s - 2, s^2 \rangle$ 在何點相交, 其交角爲何?

例 13.3.9. 令 $\mathbf{u}(t) = \mathbf{r}(t) \cdot [\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)]$, 證明 $\mathbf{u}'(t) = \mathbf{r}(t) \cdot [\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}'''(t)]$。

13.4 向量值函數之積分

定義 13.4.1. (1) 若 $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$, 則稱 $\mathbf{R}(t)$ 爲 $\mathbf{r}(t)$ 的一個反導函數。而 $\mathbf{r}(t)$ 的所有反導函數爲

$$\int \mathbf{r}(t)dt = \mathbf{R}(t) + \mathbf{C},$$

其中 $\mathbf{C}$ 爲任意的常數向量。

(2) 若 $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$ 的每一分量在 $[a, b]$ 上可積, 則 $\mathbf{r}$ 在 $[a, b]$ 上的定積分爲

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)dt = \left\langle \int_a^b f(t)dt, \int_a^b g(t)dt, \int_a^b h(t)dt \right\rangle。$$

註 13.4.2. 若 $\mathbf{R}(t)$ 爲 $\mathbf{r}(t)$ 的反導函數, 則 $\int_a^b \mathbf{r}(t)dt = \mathbf{R}(b) - \mathbf{R}(a)$。

例 13.4.3. 若 $\mathbf{r}(r) = \langle 2\cos t, \sin t, 2t \rangle$, 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{r}(t)dt$。

13.5 弧長 (Arc Length)

定義 13.5.1. (1) 一個平滑曲線 $C:\mathbf{r}(t)=\langle x(t),y(t),z(t)\rangle, t\in[a,b]$, 且當 t 從 a 到 b 時, 其軌跡恰跑遍一次, 則其弧長為

$$\begin{aligned} L &= \int_C ds = \int_C \sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2} \\ &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt \\ &= \int_a^b |\mathbf{v}(t)|dt. \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{v}(t)=\mathbf{r}'(t)$。

(2) 若 $\mathbf{r}'(t)$ 為連續, 且當 t 從 a 到 b 時, C 恰好跑一次。選取一個基點$P(t_0)$, 則對任意 t, 其有向距離為 $s(t)=\int_{t_0}^t |\mathbf{v}(\tau)|d\tau$。$s(t)$ 稱為弧長函數 (arc length function) 。

(3) 給定一數 l, 可以唯一決定曲線 C 上的一點 Q, 使得 $s(Q)=l$, 故 s 稱為 C 的弧長參數 (arc length parameter)。

例 13.5.2. 求 $\mathbf{r}(t)=\langle\cos t,\sin t,t\rangle$ 上從 $(1,0,0)$ 到 $(1,0,2\pi)$ 之弧長。

例 13.5.3. 三次撓線 (twisted cubic) 可以寫成 $\mathbf{r}_1(t)=\langle t,t^2,t^3\rangle$, $t\in[1,2]$ 或 $\mathbf{r}_2(t)=\langle e^u,e^{2u},e^{3u}\rangle$,$0\le u\le\ln 2$。試比較其弧長。

[註] 一曲線之弧長與參數表示法無關。

例 13.5.4. 令 $\mathbf{r}(t)=\langle\cos t,\sin t,t\rangle$, 用以$(1,0,0)$ 為起點之 弧長函數參數化。

註 13.5.5. 若 $\mathbf{r}(t)$ 為一平滑曲線, 則單位切向量 (unit tangent vector) 為 $\mathbf{T}=\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}=\frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}=\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ 。

例 13.5.6. 令 $\mathbf{r}(t)=\langle 3\cos t,3\sin t,t^2\rangle$, 求單位切向量。

13.6 單位法向量 (Unit Normal)

定義 13.6.1. (1) 若 $\mathbf{r}(t)$ 為平滑的空間曲線, 定義單位主法向量 (principal unit normal vector) 為 $\mathbf{N}(t)=\frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|}=\frac{\frac{d\mathbf{T}}{dt}}{|\frac{d\mathbf{T}}{dt}|}$, 簡稱單位法向量。

(2) 副法向量 (binormal vector) 為 $\mathbf{B}(t)=\mathbf{T}(t)\times\mathbf{N}(t)$, 它是與$\mathbf{N}$ 及 $\mathbf{T}$ 垂直之單位向量。

例 13.6.2. 令 $\mathbf{r}(t)=\langle\cos 2t,\sin 2t\rangle$, 求 $\mathbf{T}$ 及 $\mathbf{N}$。

例 13.6.3. 求螺旋線 $\mathbf{r}(t)=\langle\cos t,\sin t,t\rangle$ 之單位法向量及副法向量。

註 13.6.4. (1) $\frac{d\mathbf{B}}{ds}=\mathbf{T}\times\frac{d\mathbf{N}}{ds}$ 。

(2) $\frac{d\mathbf{B}}{ds}$ 與 $\mathbf{N}$ 共線, 則 $\frac{d\mathbf{B}}{ds}=-\tau\mathbf{N}$ 。τ 稱為曲線的撓率 (torsion)。

(3) $\mathbf{N}$ 及 $\mathbf{B}$ 所生成的平面稱為法平面 (normal plane)。

(4) $\mathbf{T}$ 及 $\mathbf{B}$ 所生成的平面稱爲從切面 (rectifying plane)。

(5) $\mathbf{N}$ 及 $\mathbf{T}$ 所生成的平面稱爲密切面 (osculating plane)。

(6) 法平面包含 C 上過 P 點的所有法向量。

(7) 從切面是在 P 點最接近於 C 的平面。

例 13.6.5. 兩曲面 $x = y^2$ 及 $z = x^2$ 交一曲線, 求過其上一點 (1,1,1) 之 法平面及密切面的方程式。

13.7 曲率 (Curvature)

曲率

定義 13.7.1. 令 $\mathbf{T}$ 是平滑曲線 C 的單位切向量 , 則 C 的曲率函數 (curvature) 爲 $\kappa = |\frac{d\mathbf{T}}{ds}|$ 。

定理 13.7.2. (1) 令 $\mathbf{r}(t)$ 爲一平滑曲線 , 則 $\kappa = \frac{1}{|\mathbf{v}|}|\frac{d\mathbf{T}}{dt}|$

(2) 若曲線爲 $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle$, 則 $\kappa\,(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$。

(3) 若 $\mathbf{r} = \langle x(t), y(t)\rangle$, 則 $\kappa(x) = \frac{|\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}|}{((\dot{x})^2+(\dot{y})^2)^{\frac{3}{2}}}$ 。

(4) 若平面曲線爲 $y = f\,(x)$, 則 $\kappa\,(x) = \frac{|f''(x)|}{\left[1+f'(x)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$。

例 13.7.3. (1) 一直線的曲率爲 0。

(2) 一個半徑爲 a 之圓的曲率爲 $\frac{1}{a}$。

例 13.7.4. 求參數方程爲 $x = \int_0^t \sin\left(\frac{1}{2}\pi\theta^2\right) d\theta,\ y = \int_0^t \cos\left(\frac{1}{2}\pi\theta^2\right) d\theta$ 之曲線的曲率。

例 13.7.5. (1) 一曲線爲 $\mathbf{r}(t) = \langle a\cos t, a\sin t, bt\rangle,\ a, b \geq 0,\ a^2 + b^2 \neq 0$。求曲率 κ 及單位主法向量 $\mathbf{N}$ 。

(2) 求 $\mathbf{r}\,(t) = \langle t, t^2, t^3\rangle$ 之曲率函數及它在原點的曲率。

例 13.7.6. 一曲線爲 $\mathbf{r}(t) = \langle\cos t + t\sin t, \sin t - t\cos t, t^2\rangle,\ P = (-1, -\pi, \pi^2)$。

(a) 求在 P 點的 $\mathbf{r}'(t)$ 。

(b) 求在 P 點的單位法向量, 單位法向量及單位副法向量。

(c) 求在 P 點的曲率。

例 13.7.7. 曲線 $y = \ln x$ 上那一點的曲率最大? 當 $x \to \infty$ 時會如何?

例 13.7.8. 令 $f(x) = \begin{cases} 0, & 若\ x \leq 0 \\ P(x) & 若\ 0 < x < 1 \\ 1 & 若\ x \geq 1, \end{cases}$ 其中 $P(x)$ 是個 5 次多項式。求 $P(x)$ 使得其圖形是連續, 斜率及曲率也都是連續的。

例 13.7.9. (1) 對極座標曲線 $r = f(\theta)$ 導出曲率公式。

(2) 求曲線 $r = 1 + \cos\theta$ 在 $(r, \theta) = (1, \frac{\pi}{2})$ 的曲率。

例 13.7.10. (Frenet-Serret 公式)

(1) $\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa \mathbf{N}$;

(2) $\frac{d\mathbf{N}}{ds} = -\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}$;

(3) $\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau \mathbf{N}$ 。

例 13.7.11. 證明下列等式: ($'$ 表示對 t 的導函數)

(a) $\mathbf{r}'' = s''\mathbf{T} + \kappa(s')^2\mathbf{N}$;

(b) $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \kappa(s')^3\mathbf{B}$;

(c) $\mathbf{r}''' = [s''' - \kappa^2(s')^3]\mathbf{T} + [3\kappa s's'' + \kappa'(s')^2]\mathbf{N} + \kappa\tau(s')^3\mathbf{B}$;

(d) $\tau = \frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2}$ 。

曲率圓

定義 13.7.12. 令 $\mathbf{r}(t)$ 爲一平滑曲線，P 爲曲線上一點, 設 $\kappa \neq 0$, 則在 P 點的曲率圓 (circle of curvature or osculating circle) 爲密切面上的圓, 且滿足下列條件

(i) 在 P 點與曲線相切，

(ii) 與曲線在 P 點有相同的曲率，即半徑爲 $\rho = \frac{1}{\kappa}$,

(iii) 位於曲線凹側 (concave side), 即 $\mathbf{N}$ 所指向。

圓的半徑稱爲曲線在 P 點的曲率半徑 (radius of curvature), 記爲 $\rho(= \frac{1}{\kappa})$, 圓心稱爲曲率中心 (center of curvature) 。

[註] 曲率圓是 C 在 P 點最接近的圓。

例 13.7.13. 求 $y = x^2$ 的曲率函數及在原點及點 $(1, 1), (2, 4)$ 的曲率圓。

例 13.7.14. 求 $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, t \rangle$ 在 $P\left(0, 1, \frac{\pi}{2}\right)$ 的法平面及密切面及曲率圓。

13.8 運動(Motion)

介紹有關運動的一些基本觀念, 包括速度、法向與切向加速度
介紹拋射運動及行星運動的 Kepler 定律

速度與加速度

定義 13.8.1. 若一個物體在空間中沿著一平滑曲線移動, 其位置向量函數爲 $\mathbf{r}(t)$。

(1) 其速度 (velocity) 爲 $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$。

(2) 其速率 (speed) 爲 $v(t) = |\mathbf{v}(t)| = \frac{ds}{dt}$。

(3) 加速度 (acceleration) 爲 $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t)$。

(4) $\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ 爲時間 t 時的運動方向。

例 13.8.2. (1) 若 $\mathbf{r}(t) = \langle t^3, t^2 \rangle$, 求在 $t = 1$ 時的速度、速率及加速度。

(2) 若 $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, e^t, te^t \rangle$, 求速度、速率及加速度。

例 13.8.3. 一個滑翔翼的軌跡爲 $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, t \rangle$, 則它從 $t = 0$ 到 $t = 2\pi$ 所經距離爲 多少?

例 13.8.4. 一物體從 $(1, 0, 0)$ 以初速 $\langle 1, -1, 1 \rangle$ 移動, 其加速度是 $\mathbf{a}(t) = \langle 4t, 6t, 1 \rangle$。求 $\mathbf{r}(t)$。

註 13.8.5. (1) $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{a}(u)\, du$, $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{v}(u)\, du$。

(2) 若知作用力, 則可由牛頓第二運動定律 $\mathbf{F}(t) = m\mathbf{a}(t)$ 求出物體運動之軌跡。

例 13.8.6. 一物體質量爲 m, 沿著一圓以等角速度 (angular speed) ω 運動, 則 $\mathbf{r}(t) = \langle a \cos \omega t, a \sin \omega t \rangle$。求作用在此物體上之力, 證明它是指向原點。

例 13.8.7. 一艘太空船的位置函數爲 $\mathbf{r}(t) = \langle 3 + t, 2 + \ln t, 7 - \frac{4}{t^2+1} \rangle$, 太空站位於 $(6, 4, 9)$。若太空船想要停靠太空站, 它要在何時關上引擎?

抛射運動

13.8.8. 一個抛射體在 $t = 0$, 由原點以初速 $\mathbf{v_0}$, 擲向第一象限。假設它是理想的**抛射運動** (projectile), 也就是它只受重力影響 。

(a) 其軌跡的方程 爲 $\mathbf{r} = \langle (v_0 \cos \alpha)t, (v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \rangle$, 其中 $\mathbf{v_0}$ 的角度 α 爲發射角 (launch angle),$v_0 = |\mathbf{v_0}|$ 爲初速率 。

(b) 物體所達到的高度爲 $y_{max} = \frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{2g}$ 。

(c) 物體在空中的飛行時間爲 $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$ 。

(d) 物體落地距離爲 $R = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$。

(e) 抛射運動的軌跡爲一抛物線 $y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + (\tan \alpha)x$。

例 13.8.9. 一飛彈以初速 $\mathbf{v}_0$、仰角 (angle of elevation) α 發射。假設它在理想狀況下, 則 α 爲何值可使射程最遠?

例 13.8.10. 一顆砲彈在 10 公尺高的地面, 以 $45°$ 仰角、150 m/sec 初速射出。則

(a) 10 秒後的位置爲何?

(b) 此抛物體的最高高度爲何 ?

(c) 它經多少時間落地 ?

(d) 它落地距離原點多遠 ? (取重力加速度 g=10 m/sec^2)

例 13.8.11. 一顆棒球在距離地面 3 ft 處 , 以 20^o 之角度 , 152 ft/sec 之初速擊出。當擊出時 , 有一陣風吹來其 方向與球向相反 , 其速率爲 8.8 ft/sec 。

(a) 求球的路徑方程式。

(b) 求飛得最高點爲何?

(c) 假設球未被接殺, 則經多久, 在何處落地?

例 13.8.12. 1992 年 Barcelona 奧運開幕典禮 , 射箭選手 Rebollo 以弓箭點燃聖火, 他在 6 ft 高度射箭 , 射向 90 ft 外 , 高度爲 70 ft 的聖火台 。他希望箭之最高點是在聖火台上方 4 ft 處 。則他的初速率及角度該是如何?

例 13.8.13. 一座正方形古城邊長 500 公尺, 城墻高 15 公尺。敵軍指揮官在城墻正前方 100 公尺處, 下令發射石弩, 初速 80 m/sec, 試問發射角度若干才能射入城內?

例 13.8.14. 一桌高 1.2 公尺, 一球在桌面上以 0.5 m/sec 的速度滾出桌面。

(a) 求球撞擊地面的速率;

(b) 在撞擊地面時, 其軌跡與垂線的角度爲何?

(c) 該球撞擊地面後又彈起, 假設速度減少 20%, 則第二次在何處落地?

切向及法向加速度

性質 13.8.15. 在物體運動時, $\mathbf{a} = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + (\frac{ds}{dt})^2\kappa\mathbf{N}$ 。

定義 13.8.16. $\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}$。其中 a_T 稱爲*切向加速率* (the tangential component of acceleration), a_N 稱爲*法向加速率* (the normal component of acceleration) 。

定理 13.8.17. (1) $a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}''}{|\mathbf{r}'|}$ 。

(2) $a_N = \kappa v^2 = \sqrt{|\mathbf{a}|^2 - a_T^2} = \frac{|\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|}$ 。

(3) $\kappa = \frac{|\mathbf{v}\times\mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|^3}$ 。

例 13.8.18. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t + t\sin t, \sin t - t\cos t\rangle, t \geq 0$ 。將 $\mathbf{a}$ 寫成 $a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}$ 。

例 13.8.19. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, t^2, t^3\rangle$, 求切向及法向加速度。

定理 13.8.20. (Kepler 定律)

(1) 行星以橢圓軌道繞太陽運行, 太陽位於其焦點。

(2) 太陽和行星的連線在相同時間內掃過相同面積。

(3) 行星週期的平方與橢圓主軸 (major axis) 長的立方成正比。