第 12 章

空間幾何 (The Geometry of Space)

目錄

12.1 向量的叉積 (Cross Product of Vectors)

定義 12.1.1. 若向量 $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle, \mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$, 則 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 的外積 (outer product 或叉積 cross product、向量積 vector product) 爲

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \langle a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1\rangle.$$

註 12.1.2. (1) 若向量 $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle, \mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$, 則 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 的內積 (inner product, 或點積 dot product、純量積 scalar product) 爲

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

(2) 令 $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0\rangle$, $\mathbf{j} = \langle 0, 1, 0\rangle$, $\mathbf{k} = \langle 0, 0, 1\rangle$ 分別爲在 x、y、z-軸上的單位向量, 則具有下列性質:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}.$$

(3) 外積只定義在三維空間上。若有二維向量 $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle, \mathbf{b} = \langle b_1, b_2\rangle$, 則取 $\mathbf{a}' = \langle a_1, a_2, 0\rangle, \mathbf{b}' = \langle b_1, b_2, 0\rangle$, 在本講義中定義 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a}' \times \mathbf{b}' = \langle 0, 0, a_1b_2 - a_2b_1\rangle$。

例 12.1.3. 若 $\mathbf{c} = |\mathbf{a}|\ \mathbf{b} + |\mathbf{b}|\ \mathbf{a}$, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 爲非零向量, 證明: 向量 $\mathbf{c}$ 平分 $\mathbf{a}$ 及 $\mathbf{b}$ 所夾的角。

例 12.1.4. 假設三個座標面是三面鏡子, 一個向量 $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ 先射向 xz-平面, 反射後, 再射向另一平面, 反射三次後所得的向量爲何?

例 12.1.5. $\mathbf{a} = \langle 1, 3, 4\rangle, \mathbf{b} = \langle 2, 7, -5\rangle$, 求 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$。

性質 12.1.6. (1) $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}, \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$。

(2) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 與 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 垂直。

(3) 若 θ 是 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 之間的夾角 $(0 \le \theta \le \pi)$, 則 $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$。

(4) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 的長度是 $\mathbf{a}$ 及 $\mathbf{b}$ 所張成之平行四邊形的面積。

(5) 若 $\mathbf{a},\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$, 則 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 平行的充要條件爲 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{0}$。

(6) 令 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 爲空間中的非零向量, 若 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 不平行, 則 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 決定一平面 E。令該平面的單位法向量爲

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|} = \frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta},$$

則 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 或 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{n}$ 的方向會滿足右手定則 (right-hand rule)。

若 $\mathbf{a}$ 及 $\mathbf{b}$ 平行 , 則 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{0}$; 若 $\mathbf{a}$ 及 $\mathbf{b}$ 中有一爲零 , 則 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{0}$ 。

例 12.1.7. (a) 令 E 爲經過 $P(1,4,6)$、$Q(-2,-5,-1)$、$R(1,-1,1)$ 的平面, 求一向量垂直於 E。

(b) 求以 P,Q,R 爲頂點之三角形面積。

例 12.1.8. 若 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\sqrt{3}$, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\langle 1,2,2\rangle$, 求 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 的夾角。

例 12.1.9. (a) 若 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$, 則 $\mathbf{b}=\mathbf{c}$ 是否成立?

(b) 若 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\times\mathbf{c}$, 則 $\mathbf{b}=\mathbf{c}$ 是否成立?

(c) 若 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$, 且 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\times\mathbf{c}$, 則 $\mathbf{b}=\mathbf{c}$ 是否成立?

例 12.1.10. 求所有向量 $\mathbf{v}$ 滿足:

(a) $\langle 1,2,1\rangle\times\mathbf{v}=\langle 3,1,-5\rangle$,

(b) $\langle 1,2,1\rangle\times\mathbf{v}=\langle 3,1,5\rangle$。

性質 12.1.11. 令 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in\mathbb{R}^3, c\in\mathbb{R}$。則

(1) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\mathbf{b}\times\mathbf{a}$。

(2) $(c\,\mathbf{a})\times\mathbf{b}=c(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{a}\times(c\,\mathbf{b})$。

(3) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$。

(4) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}$。

(5) $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$。

(6) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})\mathbf{c}$。

註 12.1.12. (1) 外積沒有交換律。

(2) 外積沒有結合律, 即 $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$ 及 $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ 不見得相等。

定義 12.1.13. (1) 向量 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 之純量三重積 (scalar triple product) 定義爲

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}。$$

(2) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ 稱爲 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 的向量三重積 (vector triple product)。

性質 12.1.14. 純量三重積的絕對值 $|\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})|$ 是 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 所張成之平行六面體的體積。

例 12.1.15. 求 $\mathbf{a}=\langle 1,2,-1\rangle,\mathbf{b}=\langle -2,0,3\rangle$ 及 $\mathbf{c}=\langle 0,7,-4\rangle$ 所張成之平行六面體的體積。

例 12.1.16. 證明 $\mathbf{a}=\langle 1,4,-7\rangle,\mathbf{b}=\langle 2,-1,4\rangle,\mathbf{c}=\langle 0,-9,18\rangle$ 爲共平面 (coplanar)。

例 12.1.17. 證明 $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=\begin{vmatrix}\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{d} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{d}\end{vmatrix}$。

例 12.1.18. 證明 $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot[(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})]=[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]^2$.

定義 12.1.19. 以力 $\mathbf{F}$ 作用於一物體上, 且由支點到施力點的向量爲 $\mathbf{r}$, 則物體對該支點所受的力矩 (轉矩, torque) 定義爲 $\tau=\mathbf{r}\times\mathbf{F}$, 其大小爲 $|\mathbf{r}\times\mathbf{F}|=|\mathbf{r}||\mathbf{F}|\sin\theta$。

例 12.1.20. 如圖, 以 0.25m 長的扳手旋轉螺絲, 作用力爲 40N, 夾角爲 $\theta=75°$, 求螺絲受到的力矩大小。

例 12.1.21. 假設兩向量 $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ 滿足 $|\mathbf{v}_1|=2$, $|\mathbf{v}_2|=3$ 及 $\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2=5$ 。令 $\mathbf{v}_3=\mathrm{proj}_{\mathbf{v}_1}\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_4=\mathrm{proj}_{\mathbf{v}_2}\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_5=\mathrm{proj}_{\mathbf{v}_3}\mathbf{v}_4$, $\cdots$。求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\mathbf{v}_n|$。(其中 $\mathrm{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{w}$ 表示 $\mathbf{w}$ 在 $\mathbf{v}$ 上的投影。)

12.2 柱面及二次曲面 (Cylinders and Quadratic Surfaces)

介紹柱面、旋轉面的概念, 以及二次曲面的圖形。

例 12.2.1. 討論下列空間方程式的圖形:

(1) $z=0$,

(2) $x=y$,

(3) $x+y+z=0$,

(4) $x=y+z=0$,

(5) $x^2+y^2=0$,

(6) $z=x^2$,

(7) $x^2+y^2+z^2=25$,

(8) $y^2+(z-1)^2=4$,

(9) $y^2+(z-1)^2=0$,

(10) $x^2+y^2+z^2=0$,

(11) $x^2+y^2+z^2=-1$,

(12) $z>0$,

(13) $x^2 + y^2 \geq 4$,

(14) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$,

(15) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y - 2x = 0, \end{cases}$

(16) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y = 1, \end{cases}$

(17) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \\ x + y \geq 1 \text{ 。} \end{cases}$

柱面

定義 12.2.2. (1) 給一空間中的曲面 S。任一與座標面平行的平面與 S 的交集, 稱爲該曲面的截面 (trace or cross-section)。

(2) 在空間中有一平面曲線 C, 稱爲演生曲線 (generating curve)。另外有一不在該平面上的直線 L, 稱爲母線 (ruling)。將此直線沿著 C 平行移動所得到的曲面稱爲柱面 (cylinder)。

例 12.2.3. 在 xz-平面上有一曲線 $C : g(x, z) = c$, 取平行於 y-軸之直線沿著 C 移動所得之柱面, 方程式爲 $g(x, z) = c$。

例 12.2.4. 將平行於 z-軸之直線, 沿著拋物線 $y = x^2, z = 0$ 移動 , 所得之柱面之方程式爲何?

例 12.2.5. 以下均爲柱面:

(1) $z = x^2$。

(2) $x^2 + y^2 = 1$。

(3) $y^2 - yz + z^2 = 1$。

旋轉面

例 12.2.6. 在 xy-平面上有一曲線 $f(x, y) = 0$, 將其繞 x-軸旋轉, 所得之旋轉面 (surface of revolution) 的方程式爲 $f(x, \sqrt{y^2 + z^2}) = 0$。

例 12.2.7. (a) 將 $y = x^2 (x \geq 0)$ 繞 x-軸旋轉所得之旋轉面方程式爲何?

(b) 將 $y = x^2 (x \geq 0)$ 繞 y-軸旋轉所得之旋轉面方程式爲何?

二次曲面

定義 12.2.8. 二次方程式爲 $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0$ 之圖形稱爲二次曲面 (quadratic surface)。

註 12.2.9. (1) 經過適當的平移與旋轉, 二次曲面必可轉換成以下兩種標準型:

(a) $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + I = 0$,

(b) $Ax^2 + By^2 + Iz = 0$。

(2) 其標準型有以下各類:

(a) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 爲橢球面 (ellipsoid)。

(i) 若 $a=b$, 這是橢圓的旋轉面 。

(ii) 若 $a=b=c$, 這是球面。

(b) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 爲單葉雙曲面 (hyperboloid of one sheet)。

(c) $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 爲雙葉雙曲面 (hyperboloid of two sheets)。

(d) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$ 爲錐面 (cone)。若 $a=b$, 則爲正圓錐。

(e) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$ 爲橢圓拋物面 (elliptic paraboloid)。

(f) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$ 爲雙曲拋物面 (hyperbolic paraboloid), 又稱鞍面, 原點稱爲鞍點 (saddle point)。

例 12.2.10. 以下各是何種曲面?

(1) $x^2+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$。

(2) $z=y^2-x^2$。

(3) $\frac{x^2}{4}+y^2-\frac{z^2}{4}=1$。

(4) $4x^2-y^2+2z^2+4=0$ 。

(5) $x^2+2z^2-6x-y+10=0$。

例 12.2.11. (1) 描述曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 與 $x^2+y^2=1$, $1\le z\le 2$ 所圍的區域。

(2) 描述曲面 $z=x^2+y^2$ 與 $z=2-x^2-y^2$ 所圍的區域。

例 12.2.12. 一個曲面包含所有滿足下列條件的 P 點, P 點與 x-軸之距離是它與 yz-平面之距離的兩倍。求此曲面的方程式。

例 12.2.13. 一個球其內點均包含在 $x^2+y^2+z^2<136+2(x+2y+3z)$ 之內, 且通過 $(-1,1,4)$ 點, 求如此之球最大者, 其方程式爲何?

例 12.2.14. 求兩球 $x^2+y^2+z^2=4$ 及 $x^2+y^2+z^2+4x-2y+4z+5=0$ 之內部共同部份的體積。

例 12.2.15. 令 (a,b,c) 爲曲面 $x=y^2-x^2$ 上一點, 證明直線 $\begin{cases} x=a+t \\ y=b+t \\ z=c+2(b-a)t \end{cases}$ 及 $\begin{cases} x=a+t \\ y=b-t \\ z=c-2(b+a)t \end{cases}$ 均完全在雙曲拋物面上。

例 12.2.16. 一個邊長爲 1 的正立方體, 裡面塞了 9 個半徑爲 r 的球。其中一個球心爲立方體中心, 其它 8 個均與中心球相切, 且與立方體的三個面相切, 求 r。

例 12.2.17. B 爲一立方體, 長, 寬, 高分別爲 L,W,H。令 S 爲所有與 B 之距離 ≤ 1 之點所成的集合, 求 S 的體積。

例 12.2.18. (a) 試描述一個具有下列特性的立體: 在 xy-平面上的垂直投影為一圓, 在 xz-平面上的垂直投影為一正方形, 在 yz-平面上的垂直投影為一正三角形。

(b) 若正方形邊長為 1, 則如此的立體體積最大為何?

(c) 若正方形邊長為 1, 則如此的立體體積最小為何?