第 11 章

無限級數 (Infinite Series)

目錄

(1) 無論就人或機械而言多項式是最自然的。線性逼近定裡是用一次式來逼近; Simpson 法是用二次式估計積分。

(2) 介紹無限數列與級數的概念。

(3) 介紹無限級數的各種審斂法。

(4) 介紹 Taylor 級數的概念。

(5) 介紹冪級數之各種應用。

11.1 數列 (Sequences)

(i) 介紹無限數列的斂散性。

(ii) 介紹無限數列極限的計算。

(iii) 介紹無限數列的典型例子。

(iv) 介紹一些無限數列的性質 。

數列定義

定義 11.1.1. 數列 (sequence) 是一個定義在正整數 $\mathbb{N}$ 上之函數。若此函數爲 f, 我們常將 $f(n)$ 記爲 a_n 。數列可記爲 $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$、$\{a_n\}$ 或 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$。其中 a_1 稱爲首項(first term), a_n 稱爲第 n 項。

[註] 一個數列可以由函數圖形來瞭解其性質。

數列的例子

例 11.1.2. (1) $a_n = \sqrt{n}, \quad \{a_n\} = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n}, \ldots\}$。

(2) $b_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \qquad \{b_n\} = \{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots\}$。

(3) $c_n = \frac{n-1}{n}, \qquad \{c_n\} = \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots\}$。

(4) $d_n = (-1)^{n+1}, \quad \{d_n\} = \{1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n+1}, \ldots\}$。

例 11.1.3. 一個數列不一定須要從 $n = 1$ 開始定義。

(1) $\left\{\frac{(-1)^n(n+1)}{3^n}\right\}$。

(2) $\left\{\sqrt{n-3}\right\}_{n=3}^{\infty}$。

(3) $\left\{\cos\frac{n\pi}{6}\right\}_{n=0}^{\infty}$。

例 11.1.4. 求一般項 a_n 的公式: 其前幾項是 $\left\{\frac{3}{5}, -\frac{4}{25}, \frac{5}{125}, -\frac{6}{625}, \frac{7}{3125}, \ldots\right\}$。

[註] 這不是一個正確的 "數學題目"。例如: 前幾項是 $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, 但 $a_n = n^4 - 10n^3 + 35n^2 - 49n + 24$ 滿足此條件。

例 11.1.5. 有一些數列並沒簡單的定義公式:

(1) 數列 $\{a_n\}_{n=1900}^{2016}$, 其中 a_n 是西元 n 年元旦的人口數。

(2) 數列 $\{7, 1, 8, 2, 8, 1, 8, 2, 8, 4, 5, \ldots\}$, 其中 a_n 是 e 的小數展開式中, 小數點後第 n 位。

(3) 數列 $\{a_n\}$, 其中 a_n 是第 n 個質數。質數定理 (Prime Number Theorem): 令 $\pi(x)$ 爲小於 x 的質數個數, 則 $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$ 。

例 11.1.6. 以遞迴公式定義的數列, 是給定頭幾項, 再利用前幾項, 由遞迴公式 (recursion formula) 求出下一項。

(1) $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 1$ 。

(2) $a_1 = 1$, $a_n = na_{n-1}$ 。

(3) 牛頓法: $x_0 = 1$, $x_{n+1} = x_n - \left(\frac{\sin x_n - x_n^2}{\cos x_n - 2x_n}\right)$ 。此數收斂到 $\sin x - x^2 = 0$ 的根。

(4) Fibonacci 數列: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ 。

數列的極限

定義 11.1.7. (1) 一個數列 $\{a_n\}$ 若滿足 $\forall\ \epsilon > 0$, $\exists N$ 使得若 $n > N$ 則 $|a_n - L| < \epsilon$, 則稱 $\{a_n\}$ 的極限 (limit) 爲 L。可記爲 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ 或 "當 $n \to \infty$, $a_n \to L$"。

(2) 若極限存在, 我們稱該數列收斂 (converge), 否則稱爲發散 (diverge)。

(3) 令 $\{a_n\}$ 爲一數列。若對任一數 M, 均存在 N, 使得 $\forall n > N \Rightarrow a_n > M$, 則稱 $\{a_n\}$ 發散到無限大 (diverges to infinity)。記爲 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, 或 $a_n \to \infty$。

(4) 若對任一數 m, 均存在 N, 使得 $\forall n > N \Rightarrow a_n < m$, 則稱 $\{a_n\}$ 發散到負無限大 (diverges to negative infinite)。記爲 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, 或 $a_n \to -\infty$。

例 11.1.8. (1) $\lim\limits_{n\to\infty} k = k$。

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$。

(3) 若 $r > 0, \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} = 0$。

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$。

例 11.1.9. 討論數列 $\{r^n\}$ 的斂散性。

例 11.1.10. 數列 $\{1, -1, 1, -1, \dots (-1)^{n+1}, \dots\}$ 爲發散。

[註] 一個發散數列不見得發散到正或負無限大, 如 $\{1, -2, 3, -4, 5, -6, \dots\}$ 及 $\{1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, \dots\}$。

數列極限的基本性質

性質 11.1.11. 若 $\{a_n\}$ 及 $\{b_n\}$ 爲兩收斂數列, c 爲常數。則

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$。

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$。

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n$。

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$。

(5) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$。

(6) 若 $p \in \mathbb{R}$ 且 $a_n > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^p = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^p$。(若 $p < 0$, 則要求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$。)

例 11.1.12. 求以下各極限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} (-\frac{5}{n^2})$。

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{n-1}{n})$。

(3) $\lim_{n\to\infty} \frac{4-7n^6}{n^6+3}$。

(4) $\lim_{n\to\infty} (n-\sqrt{n+1}\sqrt{n+3})$。

例 11.1.13. 若 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_k=0$, 求 $\lim_{n\to\infty} (a_0\sqrt{n}+a_1\sqrt{n+1}+a_2\sqrt{n+2}+\cdots+a_k\sqrt{n+k})$ 。

例 11.1.14. (1) 若 a, b 爲相異正數, 求 $\lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$ 。

(2) 若 $\{a_n\}$ 爲正項數列, 且 $\log_{n+1} a_n = 1+\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$, 求 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$ 。

定理 11.1.15. (1) 令 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 爲實數數列。若對大於某數 N 的所有 n, $a_n \le b_n$ 均成立, 則 $\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n$.

(2) (三明治定理, 夾擊定理, Sandwich Theorem, Squeeze Theorem) 令 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 爲實數數列。若對大於某數 N 的所有 n, $a_n \le b_n \le c_n$ 均成立。假設 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, 則 $\lim_{n\to\infty} b_n = L$。

例 11.1.16. (1) 若 $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, 則 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$。

(2) 若 $|b_n| \le c_n$, 且 $c_n \to 0$, 則 $b_n \to 0$。

(3) 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, 且 $\{b_n\}$ 爲有界, 則 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$。

[註] 若 $\lim_{n\to\infty} |a_n| \ne 0$, 則 (1) 不見得成立。

例 11.1.17. 求以下各極限:

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n}$

(2) $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$

定理 11.1.18 (數列的連續函數定理, The continuous function theorem for sequences)**.** 令 $\{a_n\}$ 爲一實數列, 且 $a_n \to L$。若 $f(x)$ 是一個函數, 在 a_n 上均有定義, 且在 L 連續, 則 $f(a_n) \to f(L)$。

[註] 連續的條件是必要的。例: 令 $f(x) = \lfloor x \rfloor$, $a_n = \frac{n-1}{n}$, 則 $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, 但 $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 0 \ne f(1)$.

例 11.1.19. 求以下各極限:

(1) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}}$

(2) $\lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}}$

(3) $\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

定理 11.1.20. 若 $f(x)$ 定義在區間 $[n_0, \infty)$上, 且 $\{a_n\}$ 爲一數列滿足 $a_n = f(n), \forall n \geq n_0$, 則

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

[註] 此定理逆敍述不見得成立。例如 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n\pi = 0$, 但 $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x\pi$ 不存在。

例 11.1.21. 以任意方法求以下各極限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}$。

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n^2}{5n^2}$。

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{5n}$。

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n$。

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{n+1}{n-1})^n$ 。

(6) $\lim\limits_{n\to\infty} x^{\frac{1}{n}}$, $(x > 0)$。

(7) $\lim\limits_{n\to\infty} x^n$, $(|x| < 1)$ 。

(8) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$。

(9) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2}$。

(10) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n}$。

(11) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!}$。

(12) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$。

例 11.1.22. 求以下各極限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\tan^{-1} n}{n}$。

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} n \sin \frac{1}{n}$。

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln 2n}$。

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} (\ln(n+1) - \ln n)$。

例 11.1.23. 對那些 r 值, 數列 $\{nr^n\}$ 爲收斂 ?

升降性與有界性

定義 11.1.24. (1) 若 $a_n < a_{n+1}$ $\forall n \geq 1$, 則 $\{a_n\}$ 稱爲上升數列。

(2) 若 $a_n \leq a_{n+1}, \forall n$, 則稱 $\{a_n\}$ 爲非下降數列 (nondecreasing sequence)。

(3) 若 $a_n > a_{n+1}\ \forall n \geq 1$, 則 $\{a_n\}$ 稱爲下降數列。

(4) 若 $a_n \geq a_{n+1}, \forall n$, 則稱 $\{a_n\}$ 爲非上升數列 (nondecreasing sequence)。

(5) $\{a_n\}$ 爲上升或下降數列, 則統稱爲單調 (monotonic)。

(6) 若存在 M, 使得 $a_n < a_{n+1}, \forall\ n > N$, 則稱 $\{a_n\}$ 爲終極上升 (ultimately increasing) 數列 。

定義 11.1.25. (1) 若 存在 M, 使得 $a_n \leq M, \forall n$, 則稱 $\{a_n\}$ 爲有上界 (bounded above), 且 M 稱爲上界 (upper bound)。

(2) 存在 N, 使得 $a_n \geq N, \forall n$, 則稱 $\{a_n\}$ 爲有下界 (bounded below), 且 M 稱爲下界 (lower bound)。

(3) $\{a_n\}$ 有上界且有下界, 則稱爲有界數列 (bounded sequence)。

(4) 若 M 爲上界, 且沒有任一個比 M 小之數爲 $\{a_n\}$ 之上界, 則 M 稱爲最小上界 (least upper bound)。

(5) 若 N 爲上界, 且沒有任一個比 N 大之數爲 $\{a_n\}$ 之下界, 則 N 稱爲最大下界 (greatest lower bound)。

例 11.1.26. 以下爲非下降數列:

(1) $\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$

(2) $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots\}$,

(3) $\{3, 3, 3, \ldots\}$。

其中 (1) 有下界, 沒有上界, (2) 有界, 且 1 爲最小上界。

例 11.1.27. $\left\{\frac{3}{n+5}\right\}$、$\left\{\frac{n}{n^2+1}\right\}$ 爲下降數列。

11.1.28. 實數完備性 (Completeness Axiom): 若 S 爲 $\mathbb{R}$ 的非空子集, 且有一上界, 則必有最小上界。

[註] 有理數 $\mathbb{Q}$ 不具完備性, 例如: $S = \{x \in \mathbb{Q} | x^2 < 2\}$ 有上界, 卻沒有最小上界。

定理 11.1.29. (單調數列定理 monotonic sequence theorem)

(1) 一個非下降數列收斂的充要條件是它有上界。

(2) 若非下降數列收斂, 則它收斂到最小上界。

[註] 此定理之反例:

(1) 並非有界數列必收斂, 例如 $\{(-1)^n\}$。

(2) 並非單調數列必收斂, 例如 $\{n\}$。

例 11.1.30. 定義數列 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 。

例 11.1.31. 討論數列 $\{a_n\}$ 之斂散性, 其中

(a) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6)$。

(b) $a_1 = 10$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6)$。

(c) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2(a_n + 6)$。

例 11.1.32. 令 a 及 b 爲正數, 且 $a > b$。定義算術平均數 (arithmetic mean) 爲 $a_1 = \frac{a+b}{2}$, 幾何平均數 (geometric mean) 爲 $b_1 = \sqrt{ab}$。同時, 定義 $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ 及 $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ 。證明:

(a) $a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n$ 。

(b) 證明 $\{a_n\}$ 及 $\{b_n\}$ 爲收斂。

(c) 證明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, 此數稱爲算幾平均數。

例 11.1.33. 令 $a_1 = 1$ 及 $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+a_n}$ 。證明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$ 。因此 $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\cdots}}$, 此爲連分數展開 (continued fraction expansion)。

11.2 無窮級數 (Infinite Series)

(i) 定義無窮級數如何求和。

(ii) 定義無窮級數的斂散性。

(iii) 介紹無窮級數的一些典型例子。

(iv) 介紹無窮級數的一些基本性質。

例 11.2.1. 如何求 $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$?

[註] Guido Ubaldus 自認爲證明了神的存在, 因爲 “something has been created out of nothing ”。

定義 11.2.2. (1) 給定一數列 $\{a_n\}$, 則 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ 稱爲一無窮級數 (infinite series), 其中 a_n 稱爲級數的第 n 項。

(2) 令 $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, 則數列 $\{s_n\}$ 稱爲部份和數列 (sequence of partial sums), 其中 s_n 稱爲第 n 個部份和。

(3) 若數列 $\{s_n\}$ 收斂, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, 則稱 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂 (converges), 且 s 稱爲此級數的和, 記爲 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$。若數列 $\{s_n\}$ 發散, 則稱此級數爲 發散 (diverges)。

註 11.2.3. (1) 將一級數加入有限項或去掉有限項, 可能影響其和, 但並不會影響其斂散性。

(2) 只要保持級數各項的順序, 重新設定各項的指標並不會影響其斂散性。

例 11.2.4. 級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部份和爲 $s_n = 3 - n2^{-n}$, 求 a_n 及和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 。

級數之例

例 11.2.5. 幾何級數 (geometric series) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$, 其中 r 爲公比, $a \neq 0$。若 $|r|<1$, 則此級數收斂到 $\frac{a}{1-r}$; 若 $|r| \geq 1$, 則此級數發散。

例 11.2.6. 求下列各級數的和。

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$,

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^n}{4^n}$,

(3) $5-\frac{10}{3}+\frac{20}{9}-\frac{40}{27}+\cdots$,

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{2n}3^{1-n}$,

(5) 將一球從高 a 公尺處擲下。每當球落地後, 反彈的高度爲落下高度的 r 倍 $(0<r<1)$。求球往返的總距離。

(6) 循環小數 $5.23232323\cdots$ 。

例 11.2.7. 求 c 值, 使得 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(1+c)^{-n}=2$ 。

例 11.2.8. 曲線 $y=e^{-\frac{x}{10}}\sin x$, $x \geq 0$, 繞 x-軸旋轉成一串珠子。

(a) 求每顆珠子的體積。

(b) 求整串珠子的體積。

定理 11.2.9. (瞭望法, telescoping) 給定數列 $\{a_n\}$, 則級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ 收斂的充要條件是 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在。且收斂時, 其和爲 $a_1-\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 。

例 11.2.10. 求下列各級數的和。

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$,

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n+1}{n}$,

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+3n+1}{(n^2+n)^3}$,

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5-5n^3+4n}$ 。

例 11.2.11. 給定 a_1, a_2, 定義 $a_n=\frac{1}{2}(a_{n-1}+a_{n-2})$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 。

例 11.2.12. 求下列各級數的和。

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2$,

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$,

(3) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$, 其中 $\frac{1}{2^n}$ 有 2^n 項。

例 11.2.13. (a) 證明 $\tan\frac{1}{2}x = \cot\frac{1}{2}x - 2\cot x$ 。

(b) 求級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$ 之和。

例 11.2.14. (a) 證明: 對 $xy \neq 1$, $\tan^{-1}x - \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}$, 若左側介於 $-\frac{\pi}{2}$ 與 $\frac{\pi}{2}$ 之間。

(b) 證明一個對應於 $\cot^{-1}x$ 的等式 。

(c) 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \cot^{-1}(n^2+n+1)$ 之和。

例 11.2.15. 調和級數 (harmonic series) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 爲發散。

例 11.2.16. 證明, 若 $n > 1$, 調和級數的第 n 個部份和不爲整數。

定理 11.2.17. (1) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂, 則 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$。

(2) (發散判斷法) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 不存在或不爲 0, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散。

[註] (1) 此定理之逆敍述不見得成立, 例如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$。
(2) 此推論只能用來判斷級數之發散性, 對於級數之收斂性毫無助益。

例 11.2.18. 判斷下列各級數的斂散性。

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2$,

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$,

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$,

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2+4}$ 。

例 11.2.19. 若級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (a_n \neq 0)$ 收斂, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/a_n$ 如何?

<u>級數運算</u>

定理 11.2.20. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 爲收斂級數, 則

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$。

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$。

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n - \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$。

註 11.2.21. (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_nb_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 不見得成立。例如: $a_n = b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 。

(2) 發散級數的非零倍仍爲發散級數。

(3) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 發散, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ 必爲發散。

(4) 即使 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 均爲發散, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ 仍可能收斂。例如 $a_n = 1$, $b_n = -1$, $\forall n$。

例 11.2.22. 判斷下列各級數的斂散性。

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}-1}{6^{n-1}}$,

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2^n}$,

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n}\right]$ 。

<u>正項級數</u>

定義 11.2.23. 若一級數的各項均爲非負實數, 則稱之爲*正項級數* (series with positive terms)。

定理 11.2.24. 一個正項級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂的充要條件是它的部份和數列有上界。

11.3 積分審斂法 (Integral Test)

(i) 我們先考慮所有項均爲非負的正項級數。

(ii) 以下將介紹一連串的審斂法, 首先是積分審斂法。

定理 11.3.1. (*積分審斂法*, integral test) 令 $\{a_n\}$ 爲一正項級數。若 $f(x)$ 爲定義在區間 $[N, \infty)$ 上的連續、正值、遞減函數, 且 $f(n) = a_n$, $\forall n \geq N$, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 與瑕積分 $\int_N^{\infty} f(x)dx$ 同斂散。

定理 11.3.2. (積分審斂法之餘項估計) 設 $f(x)$ 在 $x \geq 1$ 上爲連續、遞減、正值函數, 且 $a_n = f(n)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂。令 s_n 爲此數列的部份和, s 爲級數和, 且 $R_n = s - s_n$, 則

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \leq R_n \leq \int_{n}^{\infty} f(x)dx,$$

即

$$s_n + \int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \leq s \leq s_n + \int_{n}^{\infty} f(x)dx.$$

例 11.3.3. (1) 判斷 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ 之斂散。

(2) 判斷 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ 之斂散性。

定理 11.3.4. (p-級數) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收斂的充要條件爲 $p > 1$。

例 11.3.5. 分別求 p 值, 使以下級數收斂:

(1) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n))^p}$ 。

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p^{\ln n}$ 。

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{p}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ 。

例 11.3.6. (a) 利用前 10 項的和估計 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, 並估計誤差。

(b) 若要誤差小於 0.0005, 則要估計到第幾項?

例 11.3.7. Leonhard Euler 求出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, 試利用此結果求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(n+1)^2}$ 。

[註] $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ 。

例 11.3.8. 令 $t_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ 。證明數列 t_n 的極限存在。

[註] 此極限 γ 稱爲 Euler 常數, 其值約爲 0.57716 。

11.4 比較審斂法 (Comparison Test)

<u>比較審斂法</u>

定理 11.4.1. (比較審斂法) 令 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 爲一正項級數, 則:

(1) 若存在收斂的級數 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 使得 $a_n \le c_n, \forall n \ge N$, 則 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂。

(2) 若存在發散的正項級數 $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ 使得 $a_n \ge d_n, \forall n \ge N$, 則 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散。

例 11.4.2. 判斷下列各級數的斂散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{5n-1}$ 。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ 。

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2+4n+3}$ 。

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ 。

(5) $5 + \frac{2}{3} + \frac{1}{7} + 1 + \frac{1}{2+\sqrt{1}} + \frac{1}{4+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{2^n+\sqrt{n}} + \cdots$ 。

例 11.4.3. 利用前 100 項的和來估計 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+1}$, 並估計其誤差。

極限比較審斂法

定理 11.4.4. (極限比較審斂法, Limit Comparison Test) 設 $a_n, b_n > 0, \forall n > N$。

(1) 若 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$, 則 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 與 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 同斂散。

(2) 若 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收斂, 則 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂。

(3) 若 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 發散, 則 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散。

例 11.4.5. 判斷下列各級數的斂散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+2n+1}$ 。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^5}}$ 。

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}$ 。

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n\ln n}{n^2+5}$ 。

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-1}$ 。

例 11.4.6. (1) 若正項級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收斂, 則級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$ 如何?

(2) 若正項級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收斂, 則級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(a_n)$ 如何?

(3) 若正項級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均收斂, 則級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 如何?

11.5　比例審斂法 (Ratio Test)

定理 11.5.1. (比例審斂法, d'Almbert) 令 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 爲一正項級數, 且設 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$, 則:

(1) 若 $\rho < 1$, 則 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂。

(2) 若 $\rho > 1$ 或 ρ 爲無限大, 則 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散。

(3) 若 $\rho = 1$, 則無法下結論。

例 11.5.2. 判斷以下級數之斂散:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4+3n^3+2n^2+4n+5}{3^n}$ 。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^{52}-2007n^{24}+100n-90)\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}$ 。

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+3n-1}}{n^2+5}$ 。

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n+5}{e^n}$ 。

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!}$ 。

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ 。

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n!n!}{(2n)!}$ 。

(8) $a_n = \begin{cases} \frac{n}{2^n} & n \text{ 爲奇數} \\ \frac{1}{2^n} & n \text{ 爲偶數} \end{cases}$ 。

例 11.5.3. 級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 定義爲 $a_1 = 1,\quad a_{n+1} = \frac{2+\cos n}{\sqrt{n}} a_n$, 判斷 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的斂散 。

例 11.5.4. 求正數 k 及 ℓ 之值, 使得級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^\ell}{(kn)!}$ 收斂 。

例 11.5.5. 證明 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$ 收斂, 並導出 $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(2n)!} = 0$。

例 11.5.6. 令 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 爲正項級數, 且 $r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$。假設 $\lim_{n\to\infty} r_n = L < 1$。令 R_n 爲 n 次餘項 。

(a) 若 $\{r_n\}$ 爲下降數列, 且 $r_{n+1} < 1$, 證明 $R_n \leq \frac{a_{n+1}}{1-r_{n+1}}$ 。

(b) 若 $\{r_n\}$ 爲上升數列, 證明 $R_n \leq \frac{a_{n+1}}{1-L}$ 。

例 11.5.7. (1) 考慮級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$, 利用 s_5估計此級數和, 並求其誤差 。

(2) 求 n 值, 使 s_n 的誤差小於0.00005 。

11.6 根式審斂法 (Root Test)

定理 11.6.1. (根式審斂法) 令 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 爲正項級數, 且設 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$, 則:

(a) 若 $\rho < 1$, 則 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂。

(b) 若 $\rho > 1$ 或 ρ 爲無限大, 則 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散。

(c) 若 $\rho = 1$, 則無法下結論。

例 11.6.2. 判斷以下級數之斂散:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+n}\right)^n$ 。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$ 。

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ 。

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ 。

(5) $a_n = \begin{cases} \frac{n}{2^n} & n \text{ 爲奇數} \\ \frac{1}{2^n} & n \text{ 爲偶數} \end{cases}$ 。

11.7 交錯級數 (Alternating Series)

定義 11.7.1. 若 $b_n \geq 0, \forall n$, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n$ 或 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}b_n$ 稱爲交錯級數 (alternating series)。

定理 11.7.2. (交錯級數審斂法, Leibniz 定理) 若一交錯級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n, b_n \geq 0$ 滿足以下兩條件, 則爲收斂。

(a) $\{b_n\}$ 爲下降數列。

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$。

定理 11.7.3. (交錯級數估計定理) 若交錯級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n$ 滿足上定理的二條件, 且其值爲 L, 則以 s_n 爲估計值所造成的誤差 R_n 滿足 $|R_n| = |s_n - L| \leq b_{n+1}$。

例 11.7.4. 判斷下列級數的斂散:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 。

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{3n}{4n-1}$ 。

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{n^3+1}$ 。

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos n\pi}{2^n}$ 。

例 11.7.5. 若 n 爲奇數, $b_n = \frac{1}{n}$; 若 n 爲偶數, $b_n = \frac{1}{n^2}$ 。判斷級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$ 的斂散性 。

例 11.7.6. 以 s_8 估計 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{2^n}$ 之和, 並估計其誤差。

例 11.7.7. 估計 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n!}$ 精確到小數第三位。

例 11.7.8. 令 h_n 及 s_n 分別爲調和級數及交錯調和級數的部份和數列。

(a) 證明 $s_{2n} = h_{2n} - h_n$ 。

(b) 利用 Euler 常數證明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ 。

11.8 絕對收斂與條件收斂 (Absolute Convergence and Conditional Convergence)

定義 11.8.1. 給定一級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (不一定是正項或交錯), 則

(1) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收斂, 則稱 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 爲絕對收斂 (absolutely convergent)。

(2) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂, 但非絕對收斂, 則稱 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 爲條件收斂 (conditionally convergent)。

定理 11.8.2. (絕對收斂審斂法) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收斂, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂。

例 11.8.3. 判斷以下級數爲絕對收斂, 條件收斂或發散:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}, p > 0$ 。

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(\ln n)^p}{n}$ 。

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{3^n}$ 。

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^{1.1}}$ 。

例 11.8.4. 令 b_n 爲正項數列, 且收斂到 $\frac{1}{2}$, 判斷級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n^n b_1 b_2 \cdots b_n}$ 的絕對收斂性 。

例 11.8.5. (a) 若級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 爲條件收斂, 則級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 a_n$ 爲發散。

(b) 若級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 爲條件收斂, 則級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n$ 如何?

<u>重組定理</u>

定義 11.8.6. 一個級數的重組 (rearrangement), 就是將級數的各項改變次序。

定理 11.8.7. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 爲絕對收斂, 而 $\{b_n\}$ 爲 $\{a_n\}$ 的重組, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 也是絕對收斂, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$。

例 11.8.8. 判斷 $1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} - \frac{1}{36} - \frac{1}{64} - \frac{1}{100} - \frac{1}{144} + \cdots$ 之斂散。

定理 11.8.9. (重組定理, Riemann rearrangement theorem) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 爲條件收斂, 則必有一個 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的重組, 使其和爲任意給定的實數或發散。

例 11.8.10. 已知 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\cdots=\ln 2$。

(1) 證明 $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots=\frac{3}{2}\ln 2$。

(2) 將級數重組使其收斂到 1。

(3) 將級數重組使其發散到 ∞。

綜合例題. 判斷下列級數爲絕對收斂、條件收斂或發散:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{2n+1}$

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+1}$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+n^2}{1+n+n^4}$

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2+2n+4)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{n^2}$

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)$

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{3n-5}-\frac{8}{6n+1}\right)$

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{3n-5}-\frac{1}{4n+1}\right)$

(10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^3+1}}{3n^3+4n^2+2}$

(11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[5]{n^{18}+2n^{15}-3n^{11}+4n^9-6n^7+11n^5+4n^2-1}}{\sqrt{n^9-n^5+23n^2+n+17}}$

(12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n}}$

(13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n}$

(14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)$

(15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

(16) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)$

(17) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

(18) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$

(19) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{3^{2n-1}}$

(20) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{n\pi}}{\pi^{ne}}$

(21) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{4^n}$

(22) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^{n-1}}{(n+1)^2 4^{n+2}}$

(23) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{5^n+n}$

(24) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)5^n}{n3^{2n}}$

(25) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(2n+1)!}$

(26) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+3)!}{3^n(n!)^2}$

(27) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{n!}$

(28) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+4)!}{4^n n!}$

(29) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$

(30) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

(31) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$

(32) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}$

(33) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{5^n n!}$

(34) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$

(35) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n n!}{5\cdot 8\cdot 11\cdots(3n+2)}$

(36) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n4^n(n+1)!\ln n}{3^n(n+3)!}$

(37) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^4}$

(38) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\ln n}{(n+1)^3}$

(39) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

(40) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n\sqrt{n}}$

(41) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n$

(42) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\cos n\pi$

(43) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tan\frac{1}{n}}{n}$

(44) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{n\pi}{6}}{n^{\frac{3}{2}}}$

(45) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\sin 3n}{1.1^n}$

(46) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n^{\frac{3}{4}}}$

(47) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\frac{\pi}{n}$

(48) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\frac{\pi}{n}$

(49) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2\sqrt{n}\sin^2\left(\frac{1}{n^2}\right)$

(50) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$

(51) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-\frac{1}{2}}}{2+\sin^2 n}$

(52) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^n \sin(2^{-n})$

(53) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}$

(54) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n \sin \frac{1}{n} - 1)$

(55) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\sin \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n+1}\right]$

(56) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\tan^{-1} n}{n\sqrt{n}}$

(57) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sec^{-1} n}{\sqrt[10]{n^9+1}}$

(58) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\tan^{-1} n)^n}$

(59) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\tan^{-1} n)^n$

(60) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} [\tan^{-1} n - \tan^{-1}(n+1)]$

(61) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\cosh n}$

(62) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tanh n$

(63) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{sech}^2 n$

(64) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\ln n)^2}$

(65) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n+1}{n}$

(66) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^{\frac{n}{2}}}$

(67) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

(68) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{\sqrt{n}}$

(69) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^n$

(70) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$

(71) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n [\ln(\ln n)]^p}$

(72) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\ln(\ln n)}$

(73) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\ln n)^n}$

(74) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{1}{n}$

(75) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{2}{n}\right)$

(76) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

(77) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\ln(n+2)} - \frac{1}{\ln(n+1)}\right]$

(78) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{2n+1}$

(79) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+n)}{\ln(1+e^{n^2})}$

(80) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$

(81) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$

(82) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{2n^2+n+1}\right)^n$

(83) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{e^{\sqrt{n}}}$

(84) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{3}{\pi}\right)^n}$

(85) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^n}{n^{2n}}$

(86) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$

(87) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^{\frac{1}{n}}$

(88) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^n}{5^{2n+3}}$

(89) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$

(90) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\ln n}$

(91) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\sqrt{n}}}$

(92) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^{-1}$

(93) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^n}{3^{n^2}}$

(94) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^{n^2}}$

(95) $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6^2}+\cdots$

(96) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^2}$

(97) $\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^2}$

(98) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n}{2n+1}\right)^{3n}$

(99) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

(100) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n(\ln n)^2}-\frac{1}{n^2}\right)$

(101) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$

(102) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2}-1)$

(103) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^n$

(104) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\frac{1}{n}}}-\frac{1}{2^{\frac{1}{n+1}}}\right)$

(105) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$

(106) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \sqrt{\ln(\ln n)-1}}$

(107) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}$

(108) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{(n^n)^2}$

(109) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^2}}$

(110) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log_n(n!)}{n^3}$

(111) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n(n^n)^2}{n^{n^2}}$

(112) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})(\sqrt{2}-\sqrt[4]{2})\cdots(\sqrt{2}-\sqrt[n]{2})$

11.9 冪級數(Power Series)

冪級數

定義 11.9.1. 形如 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ 之型式的級數稱爲 $x-a$ 的冪級數 (power series) 或以 a 爲中心 (center) 的冪級數, $c_0, c_1, c_2, \ldots$ 稱爲級數的係數。

例 11.9.2. (幾何級數) (1) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 。

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} (-\frac{1}{2})^n (x-2)^n$ 。

例 11.9.3. 以下各級數中，求出使其收斂的 x 值。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$ 。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n-1}$ 。

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 。

(4) $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ 。

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$ 。

註 11.9.4. 對於收斂之 x 值, 冪級數可以定義一個函數。

例 11.9.5. 求 Bessel 函數 $J_0(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$ 之定義域。

收斂區間

定理 11.9.6. (1) 若冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=c\neq 0$ 收斂，則它在所有 x, $x\in(-|c|,|c|)$, 處均絕對收斂。

(2) 若它在 $x=d$ 發散，則它在所有 x，$|x|>|d|$, 處均發散。

定理 11.9.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n(x-a)^n$ 的收斂性可以有以下三種可能。

(a) 存在 R, 使得它在 $\{x:|x-a|>R\}$ 處發散, 在 $\{x:|x-a|<R\}$ 處絕對收斂。但在端點 $x=a+R$ 及 $x=a-R$ 處不一定。

(b) 級數在所有 x 均為絕對收斂 ($R=\infty$)。

(c) 級數只在 $x=a$ 收斂 ($R=0$)。

定義 11.9.8. 上一定理中的 R 稱為收斂半徑 (radius of convergence)，所有收斂的 x 值構成一個區間, 稱為收斂區間 (interval of convergence)。在 (a) 中有四種可能性$(a-R,a+R)$、$[a-R,a+R]$、$(a-R,a+R]$ 或 $[a-R,a+R)$; 在 (b) 中為 $\mathbb{R}$; 在 (c) 中, 收斂區間為 $\{a\}$。這就是冪級數所定義之函數的定義域。

例 11.9.9. 求以下各冪級數的收斂區間:

(1) $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots$ 。

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$ 。

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$ 。

例 11.9.10. 求冪級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1-2x)^n}{\frac{1}{1^{1.5}}+\frac{1}{2^{1.5}}+\cdots+\frac{1}{n^{1.5}}}$ 的收斂區間。

例 11.9.11. (1) 若冪級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_nx^n$ 的收斂半徑為 a, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}d_nx^n$ 的收斂半徑為 b, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_n+d_n)x^n$ 的收斂半徑為何?

(2) 若冪級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_nx^n$ 的收斂半徑為 R, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_nx^{2n}$ 的收斂半徑為何?

例 11.9.12. 若 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_nx^n$ 滿足, 對所有 $n\geq 0$, $c_{n+4}=c_n$, 則其收斂半徑為何?

11.10 冪級數的運算

加減

定理 11.10.1. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(x-a)^n$ 在 $(a-R, a+R)$ 上定義一個函數 $f(x)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n(x-a)^n$ 在 $(a-S, a+S)$ 上定義一個函數 $g(x)$, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_n+d_n)(x-a)^n$ 在兩定義域的交集部份定義函數 $(f+g)(x)$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_n-d_n)(x-a)^n$ 在兩定義域的交集部份定義函數 $(f-g)(x)$。

微積

定理 11.10.2. (逐項微分定理, Term-by-term Differentiation Theorem) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(x-a)^n$ 在 $(a-R, a+R), R>0$, 上收斂，則它在 $(a-R, a+R)$ 上定義一個函數 $f(x)$, 此函數可任意階微分, 且

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1} \text{ 。}$$

此一級數在 $(a-R, a+R)$ 上收斂 。

[註] 此定理只對冪級數成立, 例: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n!x)}{n^2}$ 對所有 x 均收斂, 但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!\cos(n!x)}{n^2}$ 對所有 x 均發散。

例 11.10.3. 令 $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n^2}$ 。

(a) 求出使 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 收斂的 x 值。

(b) 求出使 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ 收斂的 x 值。

(c) 求出使 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n''(x)$ 收斂的 x 值。

定理 11.10.4. (逐項積分定理) 令 $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ 在 $(a-R, a+R)$ 上收斂 。則 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$ 在 $(a-R, a+R)$ 上收斂，且

$$\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + C \text{ 。}$$

[註] 級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(x-a)^n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$ 與 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$ 之收斂半徑不變, 收斂區間可能會改變。

例 11.10.5. 冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ 在 $(-1,1)$ 上定義函數 $\frac{1}{1-x}$。求冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 所定義的函數。

例 11.10.6. 將函數 $f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots, x \in (-1, 1)$, 具體寫出。

乘除

定理 11.10.7. 令 $A(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 及 $B(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 在 $|x| < R$ 處絕對收斂，且 $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$，則 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 在 $|x| < R$ 處收斂到 $A(x)B(x)$。即

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ 。}$$

此乘法稱爲 Cauchy Product。

註 11.10.8. 對冪級數可作長除法 (long division)。

例 11.10.9. 利用冪級數的乘除法, 求函數 $\frac{1}{(1-x)}$ 及 $\frac{1}{(1-x)^2}$, $|x| < 1$, 的冪級數。

11.11 函數的冪級數表現 (Representations of Functions as Power Series)

例 11.11.1. $f(x) = \frac{1}{1-x}$ 在區間 $(-1, 1)$ 上可表爲冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$, 求 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 的冪級數, 並求其收斂區間。

例 11.11.2. 將以下各函數表成冪級數, 並求收斂半徑。

(1) $\frac{1}{x+2}$ 。

(2) $\frac{x^3}{x+2}$ 。

(3) $\frac{1}{1-x^2}$ 。

(4) $\frac{1}{(1-x)^2}$ 。

(5) $\ln(1-x)$ 。

(6) $\ln(1+x)$ 。

(7) $f(x) = \tan^{-1} x$ 。

例 11.11.3. (a) 將 $\int \frac{1}{1+x^7} dx$ 寫成級數。

(b) 估計 $\int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^7} dx$ 精確到 10^{-7}。

例 11.11.4. 令 $\{f_n\}$爲 Fibonacci 數列, 證明:

(a) $\frac{1}{f_{n-1}f_{n+1}} = \frac{1}{f_{n-1}f_n} - \frac{1}{f_n f_{n+1}}$ 。

(b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{f_{n-1}f_{n+1}} = 1$ 。

(c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{f_n}{f_{n-1}f_{n+1}} = 2$ 。

例 11.11.5. 令 $\{f_n\}$爲 Fibonacci 數列, $a_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$ 。

(a) 證明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在, 並求其值。

(b) 求冪級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n x^n$ 的收斂半徑。

例 11.11.6. (1) 證明函數 $f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$ 的 Maclaurin 級數爲 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n x^n$, 其中爲 $\{f_n\}$ 爲 Fibonacci 數列。

(2) 求出 Fibonacci 數列的一般項公式。

11.12 Taylor 級數及 Taylor 多項式 (Taylor Series and Taylor Polynomials)

(i) 給定一函數, 定義其 Taylor 級數 Taylor 多項式。

(ii) Taylor 定理。

(iii) 介紹一序列典型的例子。

<u>Taylor 級數及 Taylor 多項式</u>

定理 11.12.1. 若 $f(x)$ 在 a 點有級數表現 (或級數展開 series expansion), 即

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n,$$

$|x-a| < R$, 則其係數 $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$。

定義 11.12.2. 若 $f(x)$ 在一個包含 a 之區間的內點上可以無限次微分 , 則 $f(x)$ 在 $x = a$ 的 Taylor 級數 (Taylor series generated by f at $x = a$) 是

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \text{ 。}$$

若 $a = 0$, 則稱爲 Maclaurin 級數。

定義 11.12.3. 令 $f(x)$ 在一個包含 a 之區間的內點上有 N 階導數 , 則對 $n, 1 \le n \le N$, n 階的 Taylor 多項式 (Taylor polynomial of order n) 爲

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \text{ 。}$$

<u>Taylor 定理</u>

定理 11.12.4. (Taylor 定理.)

(a) 若 $f(x)$ 及 $f^{(n)}(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續, 且 $f^{(n)}(x)$ 在 (a,b) 上可微，則存在 $c\in(a,b)$ 使得

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}\text{ 。}$$

(b) 假設在包含 a 的開區間 I 上，$f(x)$ 可無限次可微，則 $\forall n,\forall x\in I,$

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x),$$

其中 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$，$c$ 介於 a 及 x 之間。

註 11.12.5. (1) Taylor 定理可記爲 $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$。$R_n(x)$ 稱爲 n 階餘項, 或以 $P_n(x)$ 估計 $f(x)$的 誤差項。

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0,\forall x\in I$，則稱 $f(x)$ 在 $x=a$ 的 Taylor 級數 收斂到 $f(x)$，並記爲 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ 。

(3) 餘項另有一積分表示式爲 $R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x(x-t)^nf^{(n+1)}(t)dt$ 。

定理 11.12.6. (1) 若存在正數 M，使得對所有 t 介於 x 及 a 之間, $|f^{(n+1)}(t)|\le M$，則 $|R_n(x)|\le M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$ 。

(2) 若 $f(x)$ 滿足 Taylor 定理之條件, 且滿足 (1) 之條件，則 Taylor 級數收斂到 $f(x)$。

<u>典型例子</u>

例 11.12.7. 求下列函數在 $x=0$ 之 Taylor 多項式及 Taylor 級數。並證明以下各函數在 $(-R,R)$ 上, Maclaurin 級數收斂到 $f(x)$, R 爲收斂半徑 。

(1) e^x

(2) $\cos x$

(3) $\sin x$

(4) $\frac{1}{1-x}$

例 11.12.8. 若 $f(x)=\sin(x^3)$, 求 $f^{(15)}(0)$。

例 11.12.9. 令 $f(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0\text{。}\end{cases}$ 求 $f(x)$在 $x=0$ 之 Taylor 級數。

[註] 此級數在所有 x 值收斂, 但只在 $x=0$ 收斂到 $f(x)$。

例 11.12.10. 求出以下函數在 $x=0$ 之 Taylor 級數 。

(1) $f(x)=\cos 2x$ 。

(2) $f(x)=\cos x^2$ 。

(3) $f(x) = \cos^2 x$ 。

(4) $f(x) = \cos(x-1)$ 。

(5) $f(x) = x^3 \sin x$ 。

(6) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{3}}$ 。

(7) $f(x) = \frac{\sin x^3}{x}$ 。

(8) $f(x) = \frac{1}{2x^2+x-6}$ 。

(9) $f(x) = \ln(2x^2+x-6)$ 。

(10) $f(x) = \begin{cases} \frac{x-\sin x}{x^3} & x \neq 0 \\ \frac{1}{6} & x = 0 \end{cases}$。

例 11.12.11. 求出以下函數在 $x=0$ 之 Taylor 級數的非零前三項 。

(1) $e^x \sin x$ 。

(2) $\tan x$ 。

<u>二項級數</u>

例 11.12.12. 求 $f(x) = (1+x)^k$ 的 Maclaurin 級數, 其中 $k \in \mathbb{R}$。

[註] 若 $k \in \mathbb{N}$, 則當 $n > k$ 時, $k(k-1)\cdots(k-n+1) = 0$, 故 $T(x)$ 只有有限次項, 它是個多項式。

定義 11.12.13. (1) 對 $m \in \mathbb{R}, k$ 爲正整數, 定義 $\binom{m}{0} = 1, \binom{m}{1} = m, \binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}$, 稱爲二項係數 (binomial coefficient)。。

(2) 對 $x \in (-1,1)$ 時 , 則二項級數 (binomial series) 爲 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \binom{m}{k} x^k$ 。

定理 11.12.14. 當 $x \in (-1,1)$ 時 , 二項級數收斂到 $(1+x)^m$, 即 $(1+x)^m = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \binom{m}{k} x^k, m \in \mathbb{R}$。

例 11.12.15. 利用二項級數 , 求以下各函數在 $x=0$ 的 Taylor 級數。

(1) $(1+x)^{-1}$ 。

(2) $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ 。

(3) $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ 。

(4) $\sin^{-1} x$ 。

例 11.12.16. 求 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x}}$ 的 Maclaurin 級數及其收斂半徑。

例 11.12.17. (1) 求 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $x=2$ 的 Taylor 級數。並求出 x 使其收斂到 $f(x)$。

(2) 求 e^x 在 $x=2$ 的 Taylor 級數。

(3) 將 $f(x) = \sin x$ 寫成以 $\frac{\pi}{3}$ 爲中心的 Taylor 級數 。

(4) 求 $\sqrt{x}$ 在 $x = 4$ 的 Taylor 級數。

例 11.12.18. (1) 證明 $(1-4x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n, \ |x| < \frac{1}{4}$ 。

(2) 求級數 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} \binom{2n-2}{n} x^n$ 之和。

(3) 求 $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ 的 Maclaurin 級數。

例 11.12.19. 解方程式 $1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} + \frac{x^3}{6!} + \frac{x^4}{8!} + \cdots = 0$ 。

例 11.12.20. 令 $u = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots$, $v = x + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$, $w = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots$。證明 $u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = 1$ 。

11.13 冪級數之應用(Applications of Power Series)

<u>估計誤差</u>

註 11.13.1. 有以下各種方法估計誤差:

(1) 若可用作圖工具, 則可畫出 $|R_n|$ 並估計誤差。

(2) 若級數恰爲交錯級數, 則可用交錯級數估計誤差。

(3) Taylor 不等式: 若 $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq M$, 則 $|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x-a|^{n+1}$。

例 11.13.2. 利用級數求 e 之值, 使其誤差 $< \frac{1}{10^6}$ 。

例 11.13.3. (a) 利用在 $a = 8$ 的二次 Taylor 多項式估計 $f(x) = \sqrt[3]{x}$。

(b) 求 $7 \leq x \leq 9$ 時的誤差。

例 11.13.4. (a) 利用估計式 $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$, 在 $-0.3 \leq x \leq 0.3$ 時, 其最大誤差爲何? 用此估計 $\sin 12°$ 到小數第六位。

(b) x 爲何值時, 其誤差小於 0.00005?

(c) 利用 Taylor 不等式解 (b)。

例 11.13.5. 在相對論中, 若物體以速度 v 運動, 則質量是 $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, m_0 是物體進靜止時的質量, 動能爲 $K = mc^2 - m_0c^2$。

(a) 證明: 若 v 相對於 c 很小, 則 $K \approx \frac{1}{2} m_0 v^2$, 符合古典物理學。

(b) 若 $|v| < 100$ m/s, 估計以上兩個 K 值的差距。

例 11.13.6. 在利用 Newton 法估計方程式 $f(x) = 0$ 之解 r 時, 若 I 爲包含 r, x_n, x_{n+1} 之區間。假設在 I 上, $f''(x)$ 存在, 且 $|f''(x)| \leq M$, $|f'(x)| \geq K$, 證明 $|x_{n+1} - r| \leq \frac{M}{2K} |x_n - r|^2$ 。

求和

例 11.13.7. (a) 求 $\tan^{-1} x$ 之 Maclaurin 級數。

(b) 證明在 $|x| \leq 1$ 時 , $\tan^{-1} x$ 等於其 Taylor 級數 。

(c) 導出 Leibniz 公式: $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)} + \cdots$ 。

(d) 利用 $\frac{\pi}{4} = \tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3}$ 估計 π 。

[註]

(1) $\pi = 48 \tan^{-1} \frac{1}{18} + 32 \tan^{-1} \frac{1}{57} - 20 \tan^{-1} \frac{1}{239}$ 。

(2) 在 π 的小數表法上, 目前已知的記錄是 T.Daisuke 及他的團隊所計算的 2,576,980,370,000 位。

例 11.13.8. (a) 求級數 $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + x^{2n-2} - x^{2n-1}$ 。

(b) 將 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$ 表成積分式 。

(c) 導出 $\left| \frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{3\cdot4} + \frac{1}{5\cdot6} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n)} - \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \right| < \int_0^1 x^{2n} dx$ 。

(d) 證明 $\frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{3\cdot4} + \frac{1}{5\cdot6} + \frac{1}{7\cdot8} + \cdots = \ln 2$ 。

例 11.13.9. (a) 將 $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ 表成 Maclaurin 級數 。

(b) 令 $x = \frac{1}{2n+1}$, 證明 $\ln(n+1) = \ln n + 2[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^5} + \cdots]$ 。

例 11.13.10. 一數列 $\{a_n\}$ 定義爲 $a_0 = a_1 = 1$, $n(n-1)a_n = (n-1)(n-2)a_{n-1} - (n-3)a_{n-2}$ 。求級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 之和 。

例 11.13.11. (1) 求級數 $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ 之和。

(2) 求級數 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+3)!}$ 之和。

(3) 求級數 $\frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot2^2} + \frac{1}{3\cdot2^3} + \frac{1}{4\cdot2^4} + \cdots$ 之和。

(4) 求級數 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ 之和。

(5) 求級數 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{n!}$ 之和。

例 11.13.12. 考慮冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} x^n$ 。

(a) 求收斂區間。

(b) 求其和。

例 11.13.13. 求以下兩式之值。

(1) $0<p<1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}}{1+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{7^p}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^p}}$ 。

(2) $p>1$, $\frac{1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots}{1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}+\cdots}$ 。

例 11.13.14. (1) 求級數 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\cdots$ 之和, 其中各項 的分母只有質因數 2 與 3。

(2) 考慮一個級數, 它是所有十進位展開式不用到 0 之正整數, 其倒數的和。證明此級數收斂且其和小於 90。

估計積分值

例 11.13.15. (a) 將 $\int_0^1 \sin x^2 dx$ 表爲冪級數。

(b) 估計 $\int_0^1 \sin x^2 dx$ 使誤差 $<\frac{1}{10^3}$ 。

例 11.13.16. (a) 求 $\int e^{-x^2}dx$ 的級數表示。

(b) 求 $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ 精確到 0.001 。

求極限

例 11.13.17. 利用冪級數求下列極限。

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$ 。

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}$ 。

(3) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})$ 。

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$ 。

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^{2x}-1)\ln(1+x^3)}{(1-\cos 3x)^2}$ 。

解微分方程

例 11.13.18. 利用冪級數解下列微分方程。

(1) 求初始值問題 $y'-y=x$, $y(0)=1$ 的級數解。

(2) 求 $y''+x^2y=0$ 之冪級數解。

Euler公式

定義 11.13.19. 對任意 $\theta\in\mathbb{R}$, 定義 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 。

註 11.13.20. (1) Euler 公式 $e^{i\pi}=-1$ 。

(2) 若 $\alpha\in\mathbb{C}$, 則可驗證 $\int e^{\alpha x}dx=\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}+C$ 仍然成立。

例 11.13.21. 求 $\int e^{ax}\cos bx dx$ 。

例 11.13.22. (a) 證明 $x^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n(\ln x)^n}{n!}$ 。

(b) 證明 $\int_0^1 x^n(\ln x)^k dx = -\frac{k}{n+1}\int_0^1 x^n(\ln x)^{k-1} dx$ 。

(c) 證明 $\int_0^1 x^x dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$ 。