第 10 章

參數方程與極座標 (Parametric Equations and Polar Coordinates)

目錄

(1) 介紹平面曲線的參數化

(2) 介紹平面上的極座標

(3) 介紹它們的微積分

10.1 參數方程式

定義 10.1.1. (1) $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ 稱爲參數 t 的參數方程 (parametric equation)。

(2) 若 $x = f(t)$, $y = g(t)$, $t \in I$, 則點集合 $\{(x, y) = (f(t), g(t)) | t \in I\}$ 稱爲參數曲線 (parametric curve), 該方程式稱爲此曲線的參數式。

(3) t 稱爲參數, I 稱爲曲線區間, 若 $I = [a, b]$, 則 $(f(a), g(a))$ 爲起點 (initial point), $(f(b), g(b))$ 爲終點 (terminal point)。

(4) 給任一曲線, 若我們寫出其參數式及其參數區間, 則稱將其參數化 (parametrized)。

註 10.1.2. 若一函數 $y = f(x)$ 可將其參數化爲 $x = t,\ y = f(t)$。則其反函數可參數化爲 $x = f(t),\ y = t$。

例 10.1.3. 討論以下曲線:

(a) $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ t \in [0, 2\pi]$。

(b) $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ t \in [0, \pi]$。

(c) $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ t$ 從 π 到 0。

(d) $x = \sin 2t,\ y = \cos 2t$、$t \in [0, 2\pi]$。

例 10.1.4. 討論以下曲線:

(1) $\begin{cases} x = \sec t \\ y = \tan t, \end{cases} \quad t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}),$

(2) (a) $x = t, y = t^2, t \in \mathbb{R}$,

(b) $x = \sqrt{t},\ y = t,\ t \geq 0$,

(c) $x = \sin t,\ y = \sin^2 t$。

例 10.1.5. 作圖:

(1) $x = t^2 - 2t,\ y = t + 1,\ t \in \mathbb{R}$。

(2) $x = \cos t,\ y = \sin 2t,\ t \in [0, 2\pi]$。

例 10.1.6. 作圖 $x = y^4 - 3y^2$。

例 10.1.7. (1) 一圓以 (h, k) 爲圓心, r 爲半徑, 求參數方程。

(2) 將起點爲 $(-2, 1)$, 終點爲 $(3, 5)$ 之線段參數化。

例 10.1.8. 擺線 (cycloid): 一圓沿著直線滾動, 圓周上固定一點 P, 其軌跡線稱爲擺線。寫出其參數式。

註 10.1.9. Brachistochrone (最短時間性) 及 Tautochrone (等時性): 將上例之擺線 $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ 倒置後之曲線, 滿足以下兩個特性: 令 $B(a\pi, 2a)$ 爲最低點。

1. 有一無阻力的珠子只受重力影響, 延著任何平滑曲線, 從原點 O 到 B。則時間最短的曲線即爲擺線。

2. 在擺線上, C 爲 O, B 間任一點, 從 C 到 B 的時間均爲等值。

例 10.1.10. 作圖:

(1) $\begin{cases} x = t + 2\sin 2t \\ y = t + 2\cos 2t, \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x = 1.5\cos t - \cos 30t \\ y = 1.5\sin t - \sin 30t, \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x = \sin(t + \cos 100t) \\ y = \cos(t + \sin 100t) \end{cases}$。

例 10.1.11. 作圖:

(1) $\begin{cases} x = \sin t + \frac{1}{2}\cos 5t + \frac{1}{4}\sin 13t \\ y = \cos t + \frac{1}{2}\sin 5t + \frac{1}{4}\cos 13t, \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x = \sin t - \sin 2.3t \\ y = \cos t, \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x = \sin t + \frac{1}{2}\sin 5t + \frac{1}{4}\cos 2.3t \\ y = \cos t + \frac{1}{2}\cos 5t + \frac{1}{4}\sin 2.3t \end{cases}$。

例 10.1.12. 給定 $P_0(x_0, y_0)$、$P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$、$P_3(x_3, y_3)$,

$$\begin{cases} x = x_0(1-t)^3 + 3x_1 t(1-t)^2 + 3x_2 t^2(1-t) + x_3 t^3 \\ y = y_0(1-t)^3 + 3y_1 t(1-t)^2 + 3y_2 t^2(1-t) + y_3 t^3, \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

為 Bezier curves。

例 10.1.13. 討論曲線族 $\begin{cases} x = a + \cos t \\ y = a\tan t + \sin t, \end{cases} \quad t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$。

10.2 參數式之切線

定理 10.2.1. 令 $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ 為一參數曲線。假設此曲線可微, 即 $f(t)$ 及 $g(t)$ 均可微。並假設 $\frac{dx}{dt} \neq 0$, 則 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$。

例 10.2.2. 若 $x = 2t + 3$, $y = t^2 - 1$, 求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=6}$。

例 10.2.3. 橢圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 可寫成 $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$。求在 $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ 的切線方程式 $(a, b > 0)$。

例 10.2.4. 一擺線之參數式為 $\begin{cases} x = r(\theta - \sin\theta) \\ y = r(1 - \cos\theta), \end{cases}$ (r 為一固定值)。

(a) 求它在 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 的切線方程式;

(b) 求它的水平及垂直切線。

例 10.2.5. 若 $\begin{cases} x = t - t^2 \\ y = t - t^3, \end{cases}$ 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$。

例 10.2.6. 紅十字會飛機拋擲救災物資。它在 700 公尺長的空曠區域投出, 物品掉落的軌跡是 $\begin{cases} x = 120t \\ y = -16t^2 + 500, \end{cases}$ $t \ge 0$。問:

(a) 物品是否會掉落在該區域內?

(b) 物體落地時的速度若干?

10.3 參數式之面積

定理 10.3.1. 令曲線爲 $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t), \end{cases}$ $t \in [a,b]$, 且當 t 從 a 增加到 b 時, 其軌跡恰在曲線上繞過一次, 則曲線與 x-軸所圍的面積爲 $A = \int_a^b |g(t)f'(t)|dt$。

例 10.3.2. 求擺線 $\begin{cases} x = r(\theta - \sin\theta) \\ y = r(1 - \cos\theta) \end{cases}$ 在一拱 (one arch) 之下的面積。

例 10.3.3. 一隻牛綁在半徑爲 r 的圓桶形倉庫上, 繩子長 πr, 則牛可吃草的面積如何?

10.4 參數式之弧長

定義 10.4.1. 令 C 爲參數曲線 $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t), \end{cases}$ $t \in [a,b]$。假設 f' 及 g' 在 $[a,b]$ 均爲連續, 且不同時爲零, 又當 t 從 a 增加到 b 時, (x,y) 恰繞過 C 一次, 則 C 的弧長爲

$$L = \int_C ds = \int_C \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}\, dt。$$

例 10.4.2. 求圓周長。

例 10.4.3. 求擺線 $\begin{cases} x = r(\theta - \sin\theta) \\ y = r(1 - \cos\theta) \end{cases}$ 一拱的長。

例 10.4.4. 求星狀線 (astroid) $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, 0 \le t \le 2\pi$ 的全長。

例 10.4.5. 參數曲線爲 $x = \int_1^t \frac{\cos u}{u} du,\ y = \int_1^t \frac{\sin u}{u} du$, 從原點到有垂直切線的最近點, 其間的弧長爲何?

10.5 參數式之表面積

定理 10.5.1. 令 C 爲參數曲線 $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t), \end{cases}$ $t \in [a,b]$, 且當 t 從 a 增加到 b 時, (x,y) 恰繞過 C 一次, 則

(1) 將 C 繞 x-軸旋轉, 其表面積爲 $S = \int_C 2\pi y\, ds = \int_a^b 2\pi y \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}\, dt$,

(2) 將 C 繞 y-軸旋轉, 其表面積爲 $S = \int_C 2\pi x\, ds = \int_a^b 2\pi x \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}\, dt$。

其一般形式爲 $S = \int_C 2\pi$(半徑長)(細帶寬)$= \int_C 2\pi\rho\, ds$。

例 10.5.2. 求半徑 r 的球面表面積。

例 10.5.3. 將圓 $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 1 + \sin t, \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$ 繞 x-軸旋轉, 求其表面積。

例 10.5.4. 曲線 C 爲 $x^{\frac{2}{5}} + y^{\frac{2}{5}} = 1$。求

(a) C 之全長,

(b) C 所包圍的區域 R 之面積,

(c) 將 R 繞 x-軸旋轉之旋轉體體績,

(d) 將 C 繞 x-軸旋轉之旋轉面表面積。

例 10.5.5. 一曲線的參數式爲 $\begin{cases} x = t^2 \\ y = \frac{1}{3}t^3 - t, \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$。

(a) 求曲線上自我相交的點。

(b) 求過該交點的切線。

(c) 求曲線的水平切線及垂直切線。

(d) 求 C 的昇降範圍;

(e) 求 C 的凹向上及凹向下範圍;

(f) 作圖。

(g) 設曲線所圍的區域爲 R, 求其周長。

(h) 求 R 所圍的面積。

(i) 將 R 繞 x-軸旋轉, 求其體積。

(j) 將 R 繞 y-軸旋轉, 求其體積。

(k) 將 R 繞 x-軸旋轉, 求其表面積。

(l) 求 R 的形心座標。

10.6 極座標

定義 10.6.1. (1) 在平面上取一點 O 爲極點 (pole), 以 O 爲起點之射線爲極軸 (polar axis)。對平面上其他任意點 P, r 是 $\overrightarrow{OP}$ 的有向距離, θ 爲極軸旋轉到 $\overrightarrow{OP}$ 的有向角, 則 (r, θ) 稱爲 P 的 極座標 (polar coordinate)。

(2) 原點的座標爲 $(0, \theta)$, 其中 θ 爲任意實數。

(3) 對任意的 r, θ 而言, $(r, \theta), (r, \theta + 2n\pi), (-r, \theta + (2n+1)\pi)$ 均表示同一點 $(n \in \mathbb{Z})$。

例 10.6.2. 以下是各點的極座標, 試描繪這些點。

(a) $\left(1, \frac{5\pi}{4}\right)$,

(b) $(2, 3\pi)$,

(c) $\left(2, -\frac{2\pi}{3}\right)$,

(d) $\left(-3, \frac{3\pi}{4}\right)$,

例 10.6.3. 求 $P\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ 的所有極座標表示法。

性質 10.6.4. (直角座標與極座標之關係)

(1) $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$。

(2) $x^2 + y^2 = r^2, \tan\theta = \frac{y}{x}$。

例 10.6.5. (a) 將極座標 $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ 改爲直角座標。

(b) 將直角座標 $(1, -1)$ 改爲極座標。

例 10.6.6. 將 $x^2 + y^2 = 9$ 改爲極座標。

例 10.6.7. 將以下各方程式改爲直角座標:

(a) $r\cos\theta = 4$,

(b) $r = \frac{4}{2\cos\theta - \sin\theta}$,

(c) $r = 1 + 2r\cos\theta$,

(d) $r = 1 - \cos\theta$。

10.7　極座標之圖形

定義 10.7.1. 極座標方程 $r = f(\theta)$, 或 $F(r, \theta) = 0$。考慮所有平面上的點 P, 其中 P 的某一個座標滿足此方程, 則這些 P 點所構成的集合稱爲此方程的圖形。

性質 10.7.2. (對稱性)

(1) 若 (r, θ) 在某圖形上, 則 $(r, -\theta)$ 或 $(-r, \pi - \theta)$ 在該圖形上 $\Leftrightarrow$ 圖形對 x-軸對稱。

(2) 若 (r, θ) 在某圖形上, 則 $(r, \pi - \theta)$ 或 $(-r, -\theta)$ 在該圖形上 $\Leftrightarrow$ 圖形對 y-軸對稱。

(3) 若 (r, θ) 在某圖形上, 則 $(-r, \theta)$ 或 $(r, \pi + \theta)$ 在該圖形上 $\Leftrightarrow$ 圖形對原點對稱。

例 10.7.3. 作以下方程式的圖形:

(a) $r = a$,

(b) $\theta = \theta_0$,

(c) $1 \le r \le 2, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$,

(d) $-3 \le r \le 2, \theta = \frac{\pi}{4}$,

(e) $r \le 0, \theta = \frac{\pi}{4}$,

(f) $\frac{2\pi}{3} \le \theta \le \frac{5\pi}{6}$。

例 10.7.4. 作以下極座標方程式之圖形:

(1) $r = 1 - \cos\theta$,

(2) $r=1-2\sin\theta$,

(3) $r=2+\cos\theta$ 。

例 10.7.5. 討論心臟線 (limacons) $r=1+c\sin\theta$ 之圖形。

例 10.7.6. 作以下極座標方程式之圖形:

(1) $r=\cos\theta$,

(2) $r=\sin 2\theta$,

(3) $r=\cos 3\theta$ 。

例 10.7.7. 作以下極座標方程式之圖形:

(1) $r^2=4\cos\theta$,

(2) $r^2=\sin 2\theta$ 。

例 10.7.8. 作圖 $r=\sin\frac{8\theta}{5}$。

例 10.7.9. 作以下極座標方程式之圖形:

(1) $r=\sin^2 2.4\theta+\cos^4 2.4\theta$。

(2) $r=\sin^2 1.2\theta+\cos^3 6\theta$。

例 10.7.10. 證明點 $(2,\frac{\pi}{2})$ 在曲線 $r=2\cos 2\theta$ 上。

例 10.7.11. (1) 求 $r=\cos 2\theta$ 及 $r=\frac{1}{2}$ 之交點。

(2) 求 $r^2=4\cos\theta$ 及 $r=1-\cos\theta$ 之交點。

10.8 極座標下的切線

定理 10.8.1. (1) $r=f(\theta)$ 之斜率為 $\frac{dy}{dx}|_{(r,\theta)}=\frac{f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta}$,若 $\frac{dx}{d\theta}\neq 0$。

(2) 若 $r=f(\theta)$ 在 $\theta=\theta_0$ 通過原點 ,則 $\frac{dy}{dx}|_{\theta=\theta_0}=\tan\theta_0$。

例 10.8.2. 考慮 $r=1+\cos\theta$。

(a) 求過 $(\frac{3}{2},\frac{\pi}{6})$ 之切線。

(b) 求其垂直切線。

(c) 求過原點之切線。

例 10.8.3. (a) 求 $r=1+\sin\theta$ 在 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 的切線斜率。

(b) 求水平及垂直的切線。

10.9 極座標下的面積

定理 10.9.1. 極曲線 $r = f(\theta)$ 及射線 $\theta = \alpha$、$\theta = \beta$ 所圍的區域面積爲 $A = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}r^2 d\theta$, 其中 $f(\theta)$ 爲正値連續函數, 且 $0 \le \beta - \alpha \le 2\pi$。

例 10.9.2. (1) 求 $r = 2(1 + \cos\theta)$ 所圍的面積。

(2) 求玫瑰線 $r = \cos 2\theta$ 之一圈所圍的面積。

(3) 求 $r = 2\cos\theta + 1$ 之圖形中小圈的面積。

例 10.9.3. (1) 求在 $r = 1$ 之內 , 且在 $r = 1 - \cos\theta$ 之外的面積。

(2) 求在 $r = \sin\theta$ 之內, 且在 $r = \sin 2\theta$ 之外的區域面積。

例 10.9.4. (a) 求 $r = 3\sin\theta$ 及 $r = 1 + \sin\theta$之交點。

(b) 求在圓 $r = 3\sin\theta$ 之內, 且在心臟線 $r = 1 + \sin\theta$ 之外的面積。

例 10.9.5. 求兩橢圓 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 及 $x^2 + \frac{y^2}{3} = 1$ 之內部共同部份的面積。

例 10.9.6. 笛卡兒葉形線 (the folium of Descartes) 爲參數曲線 $x = \frac{3t}{1+t^3}$, $y = \frac{3t^2}{1+t^3}$ 。

(a) 證明此曲線對 $x = y$ 對稱。

(b) 求垂直及水平切線。

(c) 證明: $y = -x - 1$ 爲斜漸近線。

(d) 求其直角座標方程式。

(e) 求其極座標方程式。

(f) 求一線圈的面積。

(g) 證明: 漸近線與曲線間所夾面積等於線圈面積。

10.10 極座標下之曲線弧長

定理 10.10.1. 設 $r = f(\theta), \alpha \le \theta \le \beta$, 其導函數爲連續, 且當 θ 從 α 到 β, $P(r, \theta)$ 恰繞曲線一次, 則曲線長爲 $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (\frac{dr}{d\theta})^2} d\theta$。

例 10.10.2. 求心臟線 $r = 1 - \cos\theta$ 之全長。

例 10.10.3. 曲線 $r = |\theta|$, $-2\pi \le \theta \le 2\pi$。

(a) 求內圈弧長,

(b) 求內圈與外圈之間的面積。

例 10.10.4. 有一邊長爲 a 之正方形, 有四隻蟲分別在四頂點上。這些蟲以逆時針方向, 以相同的速度往前爬, 且其方向固定指向 下一隻蟲, 直到它們在正方形中心會面。

(a) 牠們會面時的反應如何? 欣喜若狂, 遙遙無期, 暈頭轉向, 精疲力盡?

(b) 某隻蟲爬行的軌跡爲何?

(c) 一隻蟲直到會面需爬行多遠?

10.11 極座標下之旋轉體表面積

定理 10.11.1. 假設 $r = f(\theta), \alpha \le \theta \le \beta$, 之導函數爲連續, 且當 θ 從 α 到 β , $P(r, \theta)$ 恰繞曲線一次。將該曲線或 x 軸 (或 y 軸) 旋轉得一旋轉面, 其表面積爲:

(1) 繞 x-軸: $S = \int_\alpha^\beta 2\pi r \sin\theta \sqrt{r^2 + (\frac{dr}{d\theta})^2} d\theta$,

(2) 繞 y-軸: $S = \int_\alpha^\beta 2\pi r \cos\theta \sqrt{r^2 + (\frac{dr}{d\theta})^2} d\theta$。

例 10.11.2. 將 $r^2 = \cos 2\theta$ 之右圈繞 y-軸旋轉, 求旋轉面表面積。

例 10.11.3. 設 R 爲在 $r^2 = 6\cos 2\theta$ 及 $r = \sqrt{3}$ 內部, 且在第一象限內的區域, 求:

(a) R 的面積,

(b) R 繞 x-軸旋轉的表面積。

例 10.11.4. (a) 求曲線 $r^2 = \cos\theta$ 與 $r = 1 + 2\cos\theta$ 之交點。

(b) 令 R 爲曲線 $r^2 = \cos\theta$ 之內部且在 $r = 1 + 2\cos\theta$ 之外部區域, 求 R 之面積。

例 10.11.5. (a) 求曲線 $r^2 = 2\cos\theta$ 與 $r = 2 + 2\cos\theta$ 之交點。

(b) 令 R 爲曲線 $r^2 = 2\cos\theta$ 之內部且在 $r = 2 + 2\cos\theta$ 之外部區域, 求 R 之面積。

(c) 將 R 繞 x-軸旋轉, 求其表面積。

例 10.11.6. (a) 給定 ϕ, 求曲線 $r = e^\theta,\ \theta \le \phi$, 的形心 P_ϕ,

(b) 求 P_ϕ, $\phi \in \mathbb{R}$, 的軌跡。

10.12 極座標下之圓錐曲線

定理 10.12.1. 在平面上有一固定點 F 爲焦點 (focus), 有一固定直線 ℓ 爲準線 (directrix)。一個固定正數 e 爲離心率 (eccentricity)。則平面上所有滿足 $\frac{|PF|}{|P\ell|} = e$ 之點所成的集合爲一 圓錐曲線 (conic section)。
若 $e < 1$, 此曲線爲橢圓 (ellipse); 若 $e = 1$, 此曲線爲拋物線 (parabola); 若 $e > 1$, 此曲線爲雙曲線 (hyperbola)。

定理 10.12.2. 形如 $r = \frac{ed}{1 \pm e\cos\theta}$ 或 $r = \frac{ed}{1 \pm e\sin\theta}$ 之極方程式表示一圓錐曲線。

定理 10.12.3. 一橢圓之焦點位於原點, 主軸長 (major axis) 爲 $2a$, 離心率爲 e, 準線爲 $x = d$, 則其極方程式可表爲 $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$ 。

例 10.12.4. 一拋物線焦點在原點, 準線爲 $y = -6$, 求其極方程式 。

例 10.12.5. 一圓錐曲線的方程式爲 $r = \frac{10}{3-2\cos\theta}$, 求其離心率, 焦點, 準線, 判斷是何種曲線? 並作其圖。

例 10.12.6. (a) 描繪曲線 $r = \frac{12}{2+4\sin\theta}$。

(b) 將 (a) 之曲線繞原點旋轉 $\frac{\pi}{4}$, 求其方程式。

定義 10.12.7. 行星繞太陽運行的軌道是一個以太陽爲焦點的橢圓 。行星距太陽最近處稱爲近日點 (perihelion), 它與太陽的距離稱爲近日距離 (perihelion distance); 距太陽最遠處稱爲遠日點 (aphelion), 它與太陽的距離稱爲遠日距離 (aphelion distance)。

定理 10.12.8. 行星到太陽的近日距離爲 $a(1-e)$; 遠日距離爲 $a(1+e)$。

例 10.12.9. (a) 地球繞太陽運行的離心率爲 0.017, 主軸長爲 2.99×10^8 公里, 求軌道的極方程式。

(b) 求近日距離及遠日距離。