第 9 章

微分方程 (Differential Equations)

目錄

(1) 介紹微分方程的基本概念

(2) 介紹某些一階微分方程的解法

(3) 介紹微分方程的一些應用: 正交曲線族, 人口模式等

9.1 微分方程概念(Differential Equation)

例 9.1.1. 人口成長模式: 在理想狀況下是

$$p'(t) = kp(t),$$

則 $p(t) = Ce^{kt}$ 均爲其解。

例 9.1.2. logistic 微方: 若人口有一容忍量 (carrying capacity) K, 則 $\frac{dp}{dt} \approx kp$ (當 p 較小時); $\frac{dp}{dt} < 0$, 當 $p > K$。其微方爲

$$\frac{dp}{dt} = kp\left(1 - \frac{p}{K}\right)。$$

常數 $p = 0$ 及 $p = K$ 均爲其解, 稱爲穩定解 (equilibrium solutions)。

例 9.1.3. 彈簧運動模式: $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$, 其解爲 $x = a\sin\frac{k}{m}l + b\cos\frac{k}{m}l$。

定義 9.1.4. (1) 一方程式包含未知函數及其導函數, 稱爲*微分方程* (differential equation)。

(2) 微分方程中所出現的最高階導函數, 稱爲微方的*階數* (order)。

(3) $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ 稱爲*一階微分方程* (first-order differential equation)。

(4) 一個方程式的所有解, 稱爲*通解* (general solution)。

(5) 一階的初始值問題 (first-order initial value problem), 即解微分方程 $y' = f(x, y)$ 且滿足初始條件 $y(x_0) = y_0$。

(6) 滿足初始值問題的解, 稱為特解 (particular solution)。

例 9.1.5. (1) 驗證 $y = \frac{C}{x} + 2$ 滿足 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}(2 - y)$, $x \in (0, \infty)$。

(2) 驗證 $y = (x + 1) - \frac{1}{3}e^x$ 滿足 $\frac{dy}{dx} = y - x$, $y(0) = \frac{2}{3}$。

例 9.1.6. (a) 驗證 $y = \frac{1+Ce^t}{1-Ce^t}$ 是 $y' = \frac{1}{2}\left(y^2 - 1\right)$ 的解。

(b) 求一解滿足 $y\left(0\right) = 2$。

9.2 可離微方(Separable Differential Equations)

定義 9.2.1. 一個微方 $y' = f(x, y)$ 如果可以寫成 $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$ 的形式, 則稱為可離微方 (separable equation)。

例 9.2.2. (1) 解 $\frac{dy}{dx} = (1 + y^2)e^x$。

(2) 解 $(x + 1)\frac{dy}{dx} = x(y^2 + 1)$。

(3) 解 $\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2}{2y+\cos y}$。

(4) 解 $y' = x^2y$。

例 9.2.3. (1) 解 $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2}$, $y\left(0\right) = 2$。

(2) 解微分方程 $\sqrt{x}\ \frac{dy}{dx} = e^{y+\sqrt{x}}$, 且 $y(0) = 0$。

例 9.2.4. 解 $4\frac{dI}{dt} + 12I = 60$, $I\left(0\right) = 0$, 並求電流的極限量。

例 9.2.5. 解積分方程 $y(x) = 2 + \int_2^x [t - ty(t)]dt$。

例 9.2.6. (Torricelli 法則) 一個底半徑為 6, 高為 16 的直圓柱容器, 裝滿了水。以 $0.5\sqrt{x}$ 之速率流出水來, 其中 x 表示水面高度。求在時間 t 時, 容器中之水量與水深? 需多少時間才能將水流完。

例 9.2.7. 一曲線通過 $(3, 2)$, 且曲線上每一點之法線的 y-截距均為 6, 求該曲線的方程式。

9.3 一階線性微方(First-Order Linear Differential Equations), Bernoulli 方程

定義 9.3.1. $\frac{dy}{dx} + P\left(x\right)y = Q\left(x\right)$ 稱為一階線性微方 (first-order linear differential equation), 其中 $P\left(x\right)$,$Q\left(x\right)$ 為連續函數。

9.3.2. $\mathbf{y' + P(x)y = Q(x)}$ 之解法: 兩側都乘上積分因子 $v(x) = e^{\int p(x)dx}$, 並加以積分。

例 9.3.3. (1) 解 $x\frac{dy}{dx} = x^2 + 3y$, $x > 0$。

(2) 解 $y' + 2xy = 1$。

(3) 解 $\frac{dy}{dx}+3x^2y=6x^2$。

(4) 解微分方程 $(x+1)\frac{dy}{dx}-2(x^2+x)y=\frac{e^{x^2}}{x+1}$。

例 9.3.4. (1) 解 $3xy'-y=\ln x+1$, $x>0$, 且 $y(1)=-2$。

(2) 解 $x^2y'+xy=1$,$x>0$, $y\left(1\right)=2$。

例 9.3.5. 若 $I(t)$ 滿足 $L\frac{dI}{dt}+RI(t)=E\left(t\right)$, $L=4$, $R=12$, $E\left(t\right)=60$, $I(0)=0$。

(a) 求 $I\left(t\right)$。

(b) 求 $I\left(1\right)$。

(c) 求 $\lim\limits_{t\to\infty}I\left(t\right)$。

(d) 若 $E\left(t\right)=60\sin 30t$, 求 $I\left(t\right)$。

9.3.6. Bernoulli 方程: $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n$.

例 9.3.7. 解 $\frac{dy}{dx}-y=e^{-x}y^2$。

9.4 一階微方之應用

<u>正交軌跡</u>

定義 9.4.1. 一個曲線族的*正交軌跡* (orthogonal trajectory) 是一條曲線, 它和曲線族的每一個曲線均正交。

例 9.4.2. 一個曲線族為 $xy=a$, $a\neq 0$。求其正交軌跡。

例 9.4.3. 求曲線族 $x=ky^2$, $k\in\mathbb{R}$ 的正交軌跡。

例 9.4.4. 求曲線族 $y=\frac{x}{1+kx}$, $k\in\mathbb{R}$ 之正交曲線族 。

<u>混合問題</u>

9.4.5. 一化學物質倒入一容器的溶液內, 不斷攪拌並以某速度流出。要求在時間 t 時, 溶液內該物質的濃度。令 $y(t)$ 是在時間 t, 容器內化學物質的量, $V(t)$ 為時間 t 的溶液量。則 $\frac{dy}{dt}=$ (化學物質倒入的速率)$-\frac{y(t)}{V(t)}$(溶液流出的速率)。

例 9.4.6. 20 kg 的鹽溶解在 5000 L 容器的水中。現將濃度為 0.03 kg/L 的鹽水以 25 L/min 的速度持續加入 並攪拌後, 以同樣速度流出。求半小時後容器的鹽量。

例 9.4.7. 煉油廠的儲油槽內有 2000 gal 汽油, 其中有 100 lb 添加劑。以 40 gal/min 的速率加入汽油, 攪拌後以 45 gal/min 的速率流出。問 20 分鐘後, 添加劑的量有多少?

<u>人口成長</u>

9.4.8. 自然成長模式為 $\frac{dp}{dt}=kp$, 其中 k 稱為自然成長率。其解為 $p\left(t\right)=p_0e^{kt}$, 其中 $p_0=p\left(0\right)$。

定理 9.4.9. Logistic 微方 $\frac{dp}{dt}=kp\left(1-\frac{p}{K}\right)$, $p_0=p\left(0\right)$ 之解為 $p\left(t\right)=\frac{K}{1+\frac{K-p_0}{p_0}e^{-kt}}$, 且 $\lim\limits_{t\to\infty}p\left(t\right)=K$。

例 9.4.10. 解 $\frac{dp}{dt} = 0.08p\left(1 - \frac{p}{1000}\right)$, $p(0) = 100$。並求 $p(40)$ 及 $p(80)$。何時人口會達到 900?

例 9.4.11. 1990 年世界人口為 53 億, 而在 1990 年代的每年出生人口數在 3500 $\sim$ 4000 萬之間, 死亡人口數在 1500 $\sim$ 2000 萬之間。假設人口的容忍量為 1000 億, 利用這些資料, 估計在 2000 年的世界人口數目。(實際人口數為 61 億。)

9.4.12. 其他人口成長模式

(1) Gompertc 函數: $\frac{dp}{dt} = c\ln\left(\frac{k}{p}\right)p$。

(2) 季節成長模式: $\frac{dp}{dt} = kp\cos(rt - \varphi)$。

(3) $\frac{dp}{dt} = kp\left(1 - \frac{p}{K}\right) - c$ [例如漁群之量]。

(4) $\frac{dp}{dt} = kp\left(1 - \frac{p}{K}\right)\left(1 - \frac{m}{p}\right)$ [m 為免於滅絕之最低量]。