第 8 章

積分應用 (貳) [Applications of Integration-II]

目錄

(1) 以平面曲線之弧長, 旋轉面表面積, 力矩與質心等等之求法為例, 介紹如何應用積分。

(2) 介紹 Pappus 定理。

8.1 平面曲線之弧長 (Lengths of Plane Curves)

例 8.1.1. (1) 若 f' 在 $[a,b]$ 上連續, 則曲線 $y=f(x)$, $a\le x\le b$, 的弧長 (arc length) 是

$$L=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx。$$

(2) 若曲線為 $x=g(y)$, $c\le y\le d$, $g'(y)$ 為連續, 則弧長為

$$L=\int_c^d\sqrt{1+[g'(y)]^2}dy=\int_c^d\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}dy。$$

例 8.1.2. 求半徑為 r 之圓的圓周長。

例 8.1.3. (1) 求曲線 $y=\frac{4\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}-1, 0\le x\le 1$, 之弧長。

(2) 求曲線 $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}), 0\le x\le 2$, 之弧長。

(3) 求曲線 $y=(\frac{x}{2})^{\frac{2}{3}}, 0\le x\le 2$, 之全長。

例 8.1.4. (1) 求拋物線 $y^2 = x$ 從 $(0,0)$ 到 $(1,1)$ 的弧長。

(2) 求半三次拋物線 (semicubical parabola) $y^3 = x^2$ 在 $(1,1)$ 到 $(8,4)$ 之間的弧長。

例 8.1.5. 求曲線 $y = \int_1^{\frac{1}{x^2}} \sqrt{t^3+1}dt$, $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ 的全長。

例 8.1.6. 估計雙曲線 $xy = 1$ 從 $(1,1)$ 到 $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ 的弧長。

定義 8.1.7. 若平滑曲線 (smooth curve) C 的方程式是 $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, 則從 $(a, f(a))$ 爲起點的弧長函數爲 $s(x) = \int_a^x \sqrt{1+[f'(t)]^2}dt$, $x \in [a,b]$。

註 8.1.8. $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+[f'(x)]^2} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$。其微分可表爲 $ds = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx = \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}dy$, 或表爲 $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$。

例 8.1.9. 曲線 $y = x^2 - \frac{1}{8}\ln x$ 以 $P_0(1,1)$ 爲起點, 求弧長函數。

例 8.1.10. 一曲線 $y = f(x)$ 以 $(1,1)$ 爲起點, 到曲線上任一點 $(t, f(t))$ 所經過的弧長爲 $\int_1^t \sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx$, 求出所有可能的 $f(x)$。

8.2 旋轉面表面積 (Surface Area for Revolution)

定義 8.2.1. (1) 若 $f(x) \geq 0$, 且在 $[a,b]$ 上連續可微, 將曲線 $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ 繞著 x-軸旋轉, 得一旋轉面 (surface of revolution), 其表面積 (surface area) 爲

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx = \int 2\pi y ds。$$

(2) 若曲線爲 $x = g(y)$, $c \leq y \leq d$, 繞著 y-軸旋轉, 則表面積爲

$$S = \int_c^d 2\pi x \sqrt{1+\left[\frac{dx}{dy}\right]^2}dy = \int 2\pi x ds。$$

例 8.2.2. 求半徑爲 a 之球的表面積。

例 8.2.3. (1) 將曲線 $y = \sqrt{4-x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$, 繞 x-軸旋轉, 求旋轉面表面積。

(2) 曲線 $y = e^x$, $0 \leq x \leq 1$, 繞 x-軸旋轉, 求旋轉面表面積。

(3) 將曲線 $y = 2\sqrt{x}, x \in [1,2]$, 繞 x-軸旋轉, 求旋轉面之面積。

(4) 將曲線 $y = x^3, x \in [0, \frac{1}{2}]$, 繞 x-軸旋轉, 求其表面積。

例 8.2.4. (1) 將拋物線 $y = x^2$ 上從 $(1,1)$ 到 $(2,4)$ 的弧, 繞 y-軸旋轉, 求旋轉面表面積。

(2) 將直線 $y = 1 - x, 0 \leq y \leq 1$, 繞 y-軸旋轉, 生成一圓錐。求圓錐之側表面積。

例 8.2.5. 若 $a > 0$, 考慮曲線 $3ay^2 = x(a-x)^2$ 所成的線圈。

(a) 將此線圈繞 x-軸旋轉, 求其旋轉面表面積。

(b) 將此線圈繞 y-軸旋轉, 求其旋轉面表面積。

例 8.2.6. 將橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a>b$ 繞 x-軸旋轉得一橢球面, 求橢球面表面積。

例 8.2.7. 星狀線 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 繞 x-軸旋轉, 求旋轉面之表面積。

例 8.2.8. (Gabriel horn) 將 $y=\frac{1}{x}, x\geqslant 1$ 繞 x-軸旋轉, 求

(a) 旋轉體體積。

(b) 旋轉體表面積。

(c) 若 $y=\frac{1}{x^p}$, 則 (a),(b) 的答案爲何?

(d) 若 $y=\frac{1}{x}, 1\le x\le \sqrt[4]{3}$, 則 (b) 的答案爲何?

例 8.2.9. 將曲線 e^{-x}, $x\ge 0$ 繞 x-軸旋轉, 求其旋轉面表面積。

例 8.2.10. 設地球半徑爲 R 公里, 太空梭在北極上方 H 公里處。問太空人在太空梭上, 可以看見地球表面的面積是多少?

例 8.2.11. 在曲線 $y=\sqrt{x}, 0\le x\le 3$ 上有一堵圍牆, 在每一點 (x,y) 之高度爲 y, 求圍牆的面積。

8.3 力矩與質心 (Moments and Center of Mass)

有限點的質心

例 8.3.1. 一組物件在 點 $(-1,1)$, $(2,-1)$ 及 $(3,2)$, 其質量分別爲 3, 4 及 8, 求力矩及質心。

平面區域的質心

定義 8.3.2. 假設一區域 R 是在 $y=f(x)$, x-軸, $x=a$ 及 $x=b$ 之間, $y=f(x)$ 及密度 $\rho(x)$ 是連續函數 。則

(1) 對 x-軸的力矩 (一次距) 爲 $M_x=\int_a^b \frac{1}{2}(f(x))^2\rho(x)dx$, 對 y-軸的力矩爲 $M_y=\int_a^b xf(x)\rho(x)dx$;

(2) 其質量爲 $m=\int_a^b f(x)\rho(x)dx$;

(3) 其質心爲 $(\bar{x},\bar{y})$, $\bar{x}=\frac{M_y}{m}=\frac{\int_a^b xf(x)\rho(x)dx}{\int_a^b f(x)\rho(x)dx}$, $\bar{y}=\frac{M_x}{m}=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b (f(x))^2\rho(x)dx}{\int_a^b f(x)\rho(x)dx}$。

(4) 若取 $\rho(x)=1$, 則 $(\bar{x},\bar{y})$ 爲形心 (centroid)。

例 8.3.3. 證明一個等密度之細桿, 其質心恰爲其中心。

例 8.3.4. 長 10 公尺之細桿, 其密度在長 x 處爲 $\delta(x)=1+\frac{x}{10}$, 求其質心。

例 8.3.5. 求半徑爲 r 之半圓的形心。

例 8.3.6. (1) 求 $y=\cos x$, $y=0$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ 所圍區域的形心。

(2) 求 $y=x^2$ 及 $y=x$ 所圍區域的形心。

例 8.3.7. 一薄片置於平面上形如 $y = 4 - x^2$ 及 x-軸所圍的區域,

(1) 若其密度爲常數 δ, 求質心。

(2) 若 $\delta = 2x^2$, 求質心。

例 8.3.8. 一個直圓柱 $x^2 + y^2 \leq 16, z \geq 0$ 被平面 $z = 4y$ 切出楔形體 (wedge)。

(a) 求該立體體積。

(b) 求該立體的形心。

曲線的質心

例 8.3.9. 一電線形如半徑爲 r 之半圓周, 求其形心 (centroid)。

例 8.3.10. 一條電線形狀是圓弧 AB (如圖)。

(a) 求其質心。

(b) 其質心到弦 AB 的距離爲 d, 證明 $\frac{d}{h} = \frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{\alpha - \alpha\cos\alpha}$。

(c) 證明 $\lim_{\alpha\to 0} \frac{d}{h} = \frac{2}{3}$。

8.4 Pappus 定理

定理 8.4.1. (體積的 Pappus 定理) 一個平面區域 R 繞一直線 L 旋轉, 其中 L 不通過該區域的內點。則旋轉體體積爲 $V = 2\pi\rho A$, 其中 A 爲區域面積, ρ 爲 R 之形心到旋轉軸的距離。

定理 8.4.2. (表面積的 Pappus 定理) 一個平滑曲線 C 繞平面一直線 L 旋轉,L 不通過該曲線的內點。則旋轉面表面積爲 $S = 2\pi\rho\ell$, 其中 ℓ 爲曲線長, ρ 爲曲線 C 之形心到旋轉軸的距離。

例 8.4.3. 將半徑爲 a 的圓繞一直線 L 旋轉, L 與圓心距離爲 b ($b \geq a$), 得一環狀體 (torus)。

(a) 求環狀體體積,

(b) 求環狀面表面積。

例 8.4.4. 利用 Pappus 定理, 求半圓 $0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}$ 及半圓周 $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ 的形心。

例 8.4.5. (1) 求曲線 $y^2 = x^3 - x^4$ 之線圈所圍區域的形心。

(2) 求橢圓 $x^2 + (x + y + 1)^2 = 1$ 所圍之區域的形心 。

例 8.4.6. 令 R 爲 $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 與 x-軸之間的區域, 求 R 繞 $8x + 6y = 15$ 旋轉之旋轉體 體積。

8.5 液壓 (Hydrostatic Force and Pressure)

定義 8.5.1. 面積 A m^2 的薄片在水深 d m 處所受的力爲 $F = mg = \rho g A d$ (ρ 爲液體密度, g 爲重力加速度), 壓力爲 $P = \frac{F}{A} = \rho g d$。

註 8.5.2. (1) SI 單位: $\rho =$kg/m^3, $g = 9.8$ m/sec, $d =$m, $P =$N/m^2 =Pa (pascal), 水的密度爲 1000 kg/m^3。

(2) 在液體中某一點, 其各個方向所受壓力均相同。

例 8.5.3. 一個水壩爲梯形, 上底 50 m, 下底 30 m, 高爲 20 m。若水高距壩頂 4 m, 求水壩所受的力。

例 8.5.4. 一個圓柱形的鼓, 底半徑 3 m, 橫躺在水底 10 m 處, 求鼓面所受的力。

8.6 經濟學 (Economics)

定義 8.6.1. (1) *需求函數* (demand function) $p(x)$ 是表示當一個公司欲銷售出 x 單位產品所訂的價格。其圖形稱爲需求曲線, 通常是下降的。

(2) 若目前所供應的量是 x , 價格爲 P, 則 $\int_0^x [p(t) - P]\, dt$ 稱爲*消費者剩餘* (Consumer surplus)。

例 8.6.2. 若一件產品的需求函數是 $p = 1200 - 0.2x - 0.0001x^2$, 求銷售量爲 500 之時的消費者剩餘。

8.7 生命科學 (Biology)

例 8.7.1. (1) (The law of laminar flow) 一根長 l, 半徑 R 的血管, 血管兩端壓力差爲 P , 血液黏度 (viscosity) 爲 η。則在血管中距離中心軸之長度 r 的地方, 血液流通的速度爲 $v(r) = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2)$。

(2) 血液在單位時間通過一個截面的體積, 稱爲*流量* (flux of discharge), 則流量 $F = \int_0^R 2\pi r v(r)\, dr = \frac{\pi P R^4}{8\eta l}$, 此公式稱爲 Poiseuille's law。

例 8.7.2. *心臟輸出力* (Cardiac output) 是每單位時間由心臟送出之血液體積。其測量方法是染料稀釋法 (dye dilution method)。將染料打入左心房, 經心臟進入動脈, 將探針插入動脈測量染料的濃度直到時間 T 染料被送完。時間 t 的染料濃度爲 $c(t)$。F 爲血液的流率 (rate of flow), A 爲染料的量, 則 $F = \frac{A}{\int_0^T c(t)dt}$, 此即爲心臟輸出力。

例 8.7.3. 5 mg 的染料注射入右心房, 每一秒鐘動脈中的染料濃度 (mg/l) 如附表。估計心臟的輸出力。

8.8 機率 (Probability)

定義 8.8.1. (1) 某種事件的結果是屬於一個實數區間。此數值稱爲連續隨機變數 X (continuous random variables), 每一個隨機變數 X 都有一個機率密度函數 $f(x)$ (probability density function, pdf) 。則 X 在 $[a, b]$ 之間的機率爲 $P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\,dx$。

(2) 機率密度函數滿足 $f(x) \ge 0, \forall x$ 及 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$。

(3) pdf 的平均值 (mean, 期望值) 定義爲 $\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$。

(4) 一個 pdf 的中值 (median) 是數值 m 滿足 $\int_m^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}$。

例 8.8.2. 令 $f(x) = 0.006x(10 - x)$, $0 \le x \le 10$, 驗證它是 pdf, 並求 $P(4 \le x \le 8)$。

例 8.8.3. 等候時間通常是以 $f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ ce^{-ct} & t \ge 0 \end{cases}$ 爲模式, 稱爲指數分佈 (exponential distribution)。求其平均值。

例 8.8.4. 一個顧客電話的等候時間的平均值是 5 分鐘。

(a) 求在一分鐘內接通電話的機率。

(b) 求超過五分鐘接通電話的機率。

例 8.8.5. 一個 pdf 滿足 $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ 稱爲正規分佈 (normal distribuction), μ 爲平均值, σ 爲標準差 (standard deviation)。

例 8.8.6. 一個群體的 IQ 分數是正規分佈, 平均值是 100, 標準差是 15。

(a) IQ 分數在 85 到 115之間的百分比是多少?

(b) 超過 140分的人數百分比爲何?