第 6 章

積分應用 (壹) [Applications of Integration-I]

目錄

介紹: 面積, 一般立體體積, 旋轉體體積 (圓盤法, 柱狀殼法), 功

6.1 面積 (Areas)

定義 6.1.1. 若 f 及 g 在 $[a,b]$ 上連續, 且 $f(x) \geq g(x)$, 則在 $[a,b]$ 上, $y=f(x)$ 及 $y=g(x)$ 之圖形 所圍的區域面積爲 $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$。

推論 6.1.2. 曲線 $y=f(x)$ 及 $y=g(x)$ 在 $x=a$ 及 $x=b$ 之間的面積是 $A=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$。

推論 6.1.3. 若 $f(y) \geq g(y)$, $\forall\ c \leq y \leq d$, 且 $f(y)$, $g(y)$ 爲連續, 則 $x=f(y)$, $x=g(y)$, $y=c$, $y=d$ 之間所圍的區域面積爲 $A=\int_c^d |f(y)-g(y)|\,dy$。

例 6.1.4. (1) 一區域以 $y=e^x$ 爲上界, 以 $y=x$ 爲下界, 且兩側邊界爲 $x=0$, $x=b, b>0$。求其面積。

(2) 求拋物線 $y=x^2$ 及 $y=2x-x^2$ 所圍的區域面積。

(3) 求直線 $y=x-1$ 及拋物線 $y^2=2x+6$ 所圍的區域面積。

例 6.1.5. (1) 求在第一象限中, 以 $y=\sqrt{x}$ 爲上界, 以 x 軸及 $y=x-2$ 爲下界之區域面積。(以三種不同的方法解之)

(2) 在第一象限中, 一區域左側以 y-軸爲界, 下側以 $x=2\sqrt{y}$ 爲界, 上左側以 $x=(y-1)^2$ 爲界, 上右側以 $x=3-y$ 爲界, 求此區域面積爲何?

例 6.1.6. 估計曲線 $y=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ 及 $y=x^4-x$ 所圍區域之面積。

例 6.1.7. 有 A 和 B 兩車在一路上同時出發, 圖中表示他們的速度曲線。則曲線區間的面積代表何值? 並估計其值。

例 6.1.8. (1) 令 $y = x^2$ 與 $y = 4$ 所圍成的區域爲 R, 直線 $y = c$ 將其分爲等面積的兩部分, 求 c 之值。

(2) 有一區域由 $y = x - x^2$ 及 x-軸圍成, 求一通過原點的直線將其面積等分。

例 6.1.9. 令 R 爲拋物線 $y = x^2$ 與 $y = a^2$ 所圍成的區域, S 爲以 $(a, a^2), (-a, a^2), (0, 0)$ 爲頂點之三角形 。當 $a \to 0$ 時, R 之面積與 S 之面積的比值之極限爲何?

6.2 切片法求體積 (Volumes by Slicing)

定義 6.2.1. 令 S 爲介於 $x = a$ 及 $x = b$ 之間的立體區域。P_x 是通過 x-座標爲 x, 且與 x-軸垂直之平面。假設 S 在 P_x 的截面積是 $A(x)$, $A(x)$ 爲可積的函數, 則 S 的體積爲 $V = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} A(x_i^*) \triangle x = \int_a^b A(x)\, dx$。

例 6.2.2. (Cavalieri 原理) 兩立體高度相等, 且對每個高度, 其截面積均相等, 則它們的體積相等。

例 6.2.3. 金字塔形的立體, 底爲邊長 L 的正方形, 高爲 h 。求其體積。

例 6.2.4. 一立體底部是半徑爲 1 的圓, 與底垂直之截面爲等邊三角形。求其體積。

例 6.2.5. (1) 兩半徑爲 r 的直圓柱垂直相交, 求相交部分之體積。

(2) 兩半徑爲 r 的球體, 球心位於另一球的球面上, 求相交部分之體積。

例 6.2.6. 將一個底半徑爲 r, 高爲 L 之直圓柱杯子, 以水盛滿。

(a) 將杯漸漸傾斜, 使水流出, 直到水剛好蓋住底部。求所剩之水的體積。[試以各種不同之截面求之。]

(b) 將杯漸漸傾斜, 使水流出, 直到水剛好蓋住底部之直徑。求所剩之水的體積。

6.3 旋轉體體積

定義 6.3.1. 平面上有一區域及一不與該區域內部相交的直線, 將該區域繞此直線旋轉而得一立體, 稱爲*旋轉體* (solid of revolution)。

圓盤法 (Disk Method)

定義 6.3.2. 令旋轉軸爲 x-軸, 且 x-軸爲一區域的邊界, 該區域所在之範圍爲 $x \in [a, b]$ 。若此區域在 x-座標爲 x 處 的旋轉半徑爲 $R(x)$, 則旋轉體體積爲 $V = \int_a^b A(x)dx = \pi \int_a^b R(x)^2 dx$。

[註] 若旋轉軸不是 x-軸, 仍可利用同樣的想法寫出其積分式。

例 6.3.3. (1) 求半徑爲 r 之球體體積。

(2) 將曲線段 $y = \sqrt{x}, x \in [0, 1]$ 繞 x-軸旋轉, 求其體積。

(3) 一個區域 R 是由 $x = \frac{2}{y}, 1 \le y \le 4$ 及 y-軸所圍之區域。求其繞 y-軸旋轉的旋轉體體積。

(4) 將 $y = x^3, y = 8, x = 0$ 所圍區域繞 y-軸旋轉得一立體, 求其體積。

例 6.3.4. (1) 令 R 爲 $y=\sqrt{x}$ 及 $y=1, x=4$ 所圍的區域。將其繞 $y=1$ 旋轉, 求其體積。

(2) 令 R 爲 $x=y^2+1$ 與 $x=3$ 所圍區域。將其繞直線 $x=3$ 旋轉, 求其體積。

定義 6.3.5. 若一區域旋轉後得到環狀體, 其截面是墊圈 (washer), 外半徑爲 $R(x)$, 內半徑爲 $r(x)$, 則體積爲 $V=\pi\int_a^b[R(x)^2-r(x)^2]dx$。

例 6.3.6. 一區域 R 以 $y=x$ 及 $y=x^2$ 爲界。

(a) 將其繞 x-軸旋轉, 求其旋轉體體積。

(b) 將其繞直線 $y=2$ 旋轉, 求其旋轉體體積。

例 6.3.7. 一區域 R 以 $y=x^2+1$ 及 $y=-x+3$ 爲界。將其繞 x-軸旋轉, 求其旋轉體體積。

<u>柱狀殼法 (Cylindrical Shell Method)</u>

定理 6.3.8. 令 R 爲 $y=f(x)\geq 0, a\leq x\leq b$ 與 x-軸及 $x=a, x=b$ 所圍成的區域。將 R 繞 $x=L$ $(L\leq a)$ 旋轉, 則旋轉體體積爲 $V=2\pi\int_a^b(\text{殼半徑})(\text{殼高})dx=2\pi\int_a^b(x-L)f(x)dx$。

例 6.3.9. (1) 將曲線 $y=\sqrt{x}$ 在 $[0,1]$ 上的區域繞 x-軸旋轉, 利用柱狀殼法求體積。

(2) 將 $x=3y^2-2$ 及 $x=y^2$ 所圍成之區域繞 x-軸旋轉, 求其體積。

(3) 將曲線 $y=2x^2-x^3$ 及 $y=0$ 所圍的區域繞 y-軸旋轉, 求旋轉體體積。

(4) 將 $y=x$ 及 $y=x^2$ 所圍的區域繞 y-軸旋轉, 求旋轉體體積。

例 6.3.10. (1) 將曲線 $y=x-x^2$ 及 $y=0$ 所圍的區域繞 $x=2$ 旋轉, 求其體積。

(2) 一個區域 R 由曲線 $y=3x-x^2$ 及 x-軸所圍成。將其繞 $x=-1$ 旋轉, 求其旋轉體體積。

例 6.3.11. 令 R 爲 $y=\sqrt{x}$、x-軸及 $x=4$ 所圍成的區域。將 R 分別繞以下直線, 求其體積。

(a) 將 R 繞 y-軸旋轉;

(b) 將 R 繞 x-軸旋轉;

(c) 將 R 繞 $y=3$ 旋轉;

(d) 將 R 繞 $x=-1$ 旋轉。

例 6.3.12. 區域 R 是由 $y=x$ 及 $y=x^2$ 所圍成。將 R 分別繞以下直線, 求其體積。

(a) 將 R 繞 x-軸旋轉;

(b) 將 R 繞 y-軸旋轉;

(c) 將 R 繞 $y=2$ 旋轉;

(d) 將 R 繞 $x=-1$ 旋轉。

例 6.3.13. 令 R_1 爲 $y=x^2$, $y=0$ 及 $x=b$ 所圍成的區域, R_2 爲 $y=x^2$, $x=0$ 及 $y=b^2$ 所圍成的區域。分別求 b 值滿足 以下條件:

(a) R_1 及 R_2 有相同面積;

(b) R_1 繞 x-軸及繞 y-軸旋轉出相同體積;

(c) R_1 及 R_2 繞 x-軸旋轉出相同體積;

(d) R_1 及 R_2 繞 y-軸旋轉出相同體積。

例 6.3.14. 將 $y=\frac{1}{2}x^2, x=0$ 及 $y=5$ 所圍之區域繞 y-軸旋轉得一碗, 將水以每秒 3 單位的速率倒入, 則在水面高 4 單位時, 水面上升速率若干?

例 6.3.15. 令 $x=f(y)$ 爲 $[0,b]$ 上的正値, 連續函數, 將其圖形繞 y-軸旋轉得一容器。容器底部有一小孔, 面積爲 A, 水由小孔流出。Torricelli 定律說: 水流出的速率爲 $\frac{dV}{dt}=kA\sqrt{h}$, k 爲一常數, h 爲水高。求函數 $f(y)$ 使得 $\frac{dh}{dt}$ 爲常數。[此時, 此容器可作爲水鐘。]

例 6.3.16. 一個倒立直圓錐容器高爲 h, 圓錐頂點半角 (semivertical angle) 爲 θ。容器裝滿水, 現將一球置入使水滿溢, 則球半徑如何會使水溢出最多?

6.4 功 (Work)

定義 6.4.1. 一物體沿著 x-軸從 $x=a$ 移動到 $x=b$, 在每一點 x 上, 有力 $f(x)$ 作用於其上, 其中 $f(x)$ 爲連續函數, 則施力所作的功爲 $W=\int_a^b f(x)dx$。

例 6.4.2. 施力 $f(x)=x^3+2x$ 作用在一物體上, 使得該物體從 $x=1$ 移到 $x=3$, 則所作的功爲多少?

例 6.4.3. (Hooke 定律) 將一彈簧由正常長度拉長 x 單位, 所需施的力爲 $f(x)=kx$。若以 40 N 的力, 可將一正常爲 10 cm 的彈簧拉長到 15 cm, 則將它從 15 cm 拉長到 18 cm 需作功多少?

例 6.4.4. 100 ft 長的均勻纜繩, 重量爲 200 lb, 其中一端懸吊在一高塔上。需要作多少功才可將該繩收到高塔上?

例 6.4.5. 一倒立錐形的容器, 底半徑 4 m, 高 10 m, 其中水面高 8 m。要將水從容器頂部全部抽出, 需作多少功?