第 5 章
積分 (Integrations)

目錄

(1) 由求面積的想法引入定積分的概念。

(2) 定義定積分。

(3) 介紹微積分基本定理。

(4) 介紹定積分的第一個基本技巧 - 變數變換。

5.1 面積的估計

例題

例 5.1.1. (1) 利用矩形面積估計在 $x = 0$ 到 $x = 1$ 之間, 拋物線 $y = x^2$ 下的面積。

(2) 利用 (1) 的結果推導出其面積約爲 $\frac{1}{3}$。

面積的定義

定義 5.1.2. (1) 令 $f(x)$ 爲 $[a, b]$ 上的非負函數。則 $x = a$, $x = b$, x-軸及 $y = f(x)$ 之圖形所圍的區域 S, 稱爲在 $f(x)$ 之圖形下, 從 $x = a$ 到 b 的區域。

(2) 將 $[a, b]$ 等分爲 n 個子區間 (subinterval) $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$, 其中 $x_0 = a$, $x_n = b$, $\Delta x = |x_i - x_{i-1}| = \frac{b-a}{n}$, $\forall i$。令 $R_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$, 則 S 的面積 A 定義爲 $A = \lim\limits_{n\to\infty} R_n$ 。

註 5.1.3. (1) 令 $L_n = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x$, 則可證明 $A = \lim\limits_{n\to\infty} L_n$ 。

(2) 在第 i 個子區間 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取 x_i^*, 則稱 $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ 爲樣本點 (sample points), 可證明 $A = \lim_{n\to\infty}[f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x]$ 。

(3) 若選取 x_i^* 使得 $f(x_i^*)$ 是 $f(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的最大值, 則稱 $f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x$ 爲 f 的一個上和 (upper sum); 若選取 x_i^* 使得 $f(x_i^*)$ 是 $f(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的最小值, 則稱 $f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x$ 爲 f 的一個下和 (lower sum) 。

(4) 可證明面積 A 是上和的最大下界, 也是下和的最小上界 。

例 5.1.4. (1) 求在 $[0, b]$ 之間, 位於 $y = x$ 下方的面積。

(2) 求在 $[0, b]$ 之間, 位於 $y = x^2$ 下方的面積。

例 5.1.5. 令 A 爲在曲線 $y = e^x$ 下, 從 $x = 0$ 到 $x = 2$ 之間的面積, 試求 A。

例 5.1.6. 如果車子的里程表壞了, 而速度表記錄每 5 秒鐘的速率 (km/h) 如下:

時間	0	5	10	15	20	25	30
速率	27	34	38	46	51	50	45

則這 30 秒所走的距離大約多少?

5.2 定積分 (Definite Integrals)

定積分的定義

定義 5.2.1. (1) 令 $f(x)$ 爲 $[a, b]$ 上的函數。將 $[a, b]$ 等分爲 n 個子區間, 每個寬度爲 $\Delta x = \frac{b-a}{n}$。令 $x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ 爲子區間的端點, 且 $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$, 爲樣本點。若極限 $\lim_{n\to\infty}[f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x]$ 存在, 且對任意選取的樣本點其值均相等, 則稱其值爲 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的定積分 (the definite integral of f from a to b), 記爲

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x \text{ 。}$$

(2) 若它存在, 則稱 f 在 $[a, b]$ 上可積 (integrable) 。

註 5.2.2. (1) 上定義詳述爲: 存在 L, 使得 $\forall \epsilon > 0, \exists N$, 使得對任意 $n > N$, 以及任意選取的樣本點 $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, 均滿足 $|\sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x) - L| < \epsilon$。

(2) 定積分記爲 $\int_a^b f(x)dx$, 其中 $\int$ 爲積分符號, a 爲積分下限 (lower limit of integration), b 爲積分上限 (upper limit of integration), $f(x)$ 爲被積分式 (integrand), x 爲積分變數 (variable of integration)。

(3) 積分式中的 x 爲啞變數 (dumming variable), 即定積分記爲 $\int_a^b f(x)dx, \int_a^b f(t)dt$ 或 $\int_a^b f(u)du$ 均相同。

(4) 對任意選取的樣本點 $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*,$, $R(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x$ 稱爲 $f(x)$ 的一個 Riemann 和。

(5) 任給一個分割 $\mathcal{P}=\{x_0,x_1,\ldots,x_{n-1},x_n\}$, 它不一定是 n 等分。令 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $\mathcal{P}$ 的範數 (norm) 定義爲 $\|\mathcal{P}\|=\max\{\Delta x_i\}$。則仍可定義定積分爲

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0}R(\mathcal{P})。$$

(6) 若 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可積且爲非負值, 則在 $[a,b]$ 上, 曲線 $y=f(x)$ 之下方的面積爲 $A=\int_a^b f(x)dx$。

(7) 若 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上之值有正有負, 其曲線和 x-軸所圍區域爲 S, S 在 x-軸以上的部份面積爲 A_1, 在 x-軸以下的部份面積爲 A_2, 則 $\int_a^b f(x)dx=A_1-A_2$。

推論 5.2.3. 若 f 在 $[a,b]$ 可積分, 則

(1)
$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x,$$

其中 $\Delta x=\frac{b-a}{n}$, 且 $x_i=a+i\Delta x$。

(2) (中點法)
$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f(\overline{x_i})\Delta x,$$

其中 $\Delta x=\frac{b-a}{n}$, 且 $\overline{x_i}=\frac{1}{2}(x_{i-1}+x_i)$。

例 5.2.4. 利用中點法, 取 $n=5$, 估計 $\int_1^2\frac{1}{x}dx$。

定理 5.2.5. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續或只有有限個跳躍不連續 (逐段連續函數), 則 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可積分。

例 5.2.6. (1) 若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界單調函數, 則 $f(x)$ 可積分。

(2) 令 $D(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q},\end{cases}$ 則 $D(x)$ 在 $[0,1]$ 上不可積分。

例 5.2.7. (1) 求 $\int_1^3(x^3-6x)dx$。

(2) 求 $\int_1^3 e^x dx$。

例 5.2.8. (1) 利用面積求 $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$。

(2) 利用面積求 $\int_0^3(x-1)dx$。

(3) 利用面積求 $\int_a^b\lfloor x\rfloor dx$, 其中 $0\le a<b$。

例 5.2.9. 假設 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上爲正值, 連續, 遞增, $0<a<b$, 求 $\int_a^b f(x)dx+\int_{f(a)}^{f(b)}f^{-1}(x)dx$。

例 5.2.10. 將極限表爲定積分的形式。

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left[\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right]$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{n+2}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{n+4}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{1}{1+\left(\frac{n+2n}{n}\right)^2}\right]$。

5.3 定積分性質 (Properties of Definite Integrals)

積分性質

性質 5.3.1. 假設函數 f 及 g 在 $[a,b]$ 及 $[b,c]$ 上均可積分, 且 k 爲一常數, 則

(1) $\int_a^b k dx = k(b-a)$。

(2) $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$。

(3) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$。

(4) $\int_a^a f(x)dx = 0$。

(5) $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$。

(6) 若 f 在 $[a,b]$ 有極大値 M, 有極小値 m, 則 $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$。

(7) 若在 $[a,b]$ 上, $f(x) \geq g(x)$, 則 $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$。

定義 5.3.2. 若 $a > b$, 則定義 $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$。此時以上性質 (1) $\sim$ (5) 仍滿足。

例 5.3.3. 已知 $\int_{-1}^1 f(x)dx = 5, \int_1^4 f(x)dx = -2, \int_{-1}^1 g(x)dx = 7$。求:

(a) $\int_4^1 f(x)dx$;

(b) $\int_{-1}^1 (2f(x) + 3g(x))\, dx$;

(c) $\int_{-1}^4 f(x)dx$。

例題

例 5.3.4. 求積分値:

(1) $\int_0^1 (4+3x^2)dx$,

(2) $\int_2^6 (2x-6+\sqrt{-x^2+8x-12})dx$,

(3) $\int_{-\sqrt{3}}^{\pi} (|2x-1| + \lfloor x \rfloor)dx$ 。

例 5.3.5. 估計 $\int_0^1 e^{x^2} dx$。

例 5.3.6. 證明

(1) $\int_0^1 \sqrt{1+\cos x}\, dx \leq \frac{3}{2}$。

(2) $\frac{9}{13} \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \leq \frac{23}{26}$。

函數的平均値

定義 5.3.7. 若 f 在 $[a,b]$ 上可積, 則 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的平均値 (average value, mean value) 定義爲 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$。

例 5.3.8. 求 $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ 在 $[-2,2]$ 上的平均值。

例 5.3.9. 若 f 在 $[a,b]$ 上連續, $av(f)$ 爲 $f(x)$ 的平均值, 則 $\int_a^b av(f)dx=\int_a^b f(x)dx$ 是否成立?

例 5.3.10. 說明: 一車的速度函數在 $[t_1,t_2]$ 的平均值等於這車在旅程的平均速度。

定理 5.3.11. (積分的平均值定理, Mean Value Theorem for Definite Integral) 若 f 在 $[a,b]$ 上連續, 則必存在 $c\in[a,b]$, 使得 $f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$。

例 5.3.12. 求 $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ 在 $[0,2]$ 上的平均值, 並指出在那一點的函數值等於該值?

例 5.3.13. 證明: 若 f 在 $[a,b]$ 上連續, 且 $\int_a^b f(x)dx=0$, 則 f 在 $[a,b]$ 上必有一點取值爲 0。

例 5.3.14. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\int_{\sqrt{x}}^{x}e^{-u^2}du$。

5.4　微積分基本定理 (Fundemrntal Theorem of Calculus)

微積分基本定理之一

例 5.4.1. 令 $f(x)$ 如圖, $g(x)=\int_0^x f(t)dt$。求 $g(0)$、$g(1)$、$g(2)$、$g(3)$、$g(4)$ 及 $g(5)$, 並作 $g(x)$ 的略圖。

定理 5.4.2. (微積分基本定理 Fundamental Theorem of Calculus, 第一部份) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續, 且令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, 則 $F(x)$在 $[a.b]$ 上連續, 且 $F(x)$ 在 (a,b) 上 可微, $F'(x)=f(x)$。即 $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$。

例 5.4.3. (1) 求 $g\left(x\right)=\int_0^x\sqrt{1+t^2}dt$ 的導函數。

(2) 若 $y=\int_x^5 3t\sin t dt$, 求 $\frac{dy}{dx}$。

(3) 若 $y=\int_1^{x^4}\sec t dt$, 求 $\frac{dy}{dx}$。

(4) 若 $y=\int_{1+3x^2}^{\ln x}\frac{1}{2+e^t}dt$, 求 $\frac{dy}{dx}$。

(5) $\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\tan^{-1}x}e^{t^2}dt$ 。

(6) $\frac{d}{dt}\int_a^x\sin(t^2)dt$。

(7) $\frac{d}{dx}\int_1^2\frac{\sin x}{x}dx$ 。

例 5.4.4. (1) 令 $f(\theta)=\int_{\theta^2}^{\cos\theta}\sin(t^2)dt$, 求 $f'(\theta), f''(\theta)$。

(2) 令 $g(x)=\int_0^{\cos x}[1+\sin(t^2)]dt$, $f(x)=\int_0^{g(x)}\frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}dt$, 求 $f'(\frac{\pi}{2})$。

(3) 求 $\frac{d^2}{dx^2}\int_0^x\int_1^{\sin t}\sqrt{1+u^4}dudt$。

例 5.4.5. (1) 求 $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x(\sec t-1)dt}{x^3}$ 。

(2) 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\int_{x^2}^0 e^{t-x^2}(2t^2+1)dt}{x^4}$。

(3) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^{\tan x} f(u)(\sin x-\cos u)du$, 其中 $f(u)$ 是連續函數。

例 5.4.6. 曲線 $y=\int_0^x \frac{t^2}{t^2+t+2}dt$ 在那個區間上爲下凹？

例 5.4.7. 若 $\int_0^{x^2} f(t)dt = x\sin\pi x$, 求 $f'(9)$。

例 5.4.8. 求函數 f 及數值 a, 使得對所有 $x>0$, 滿足 $6+\int_a^x \frac{f(t)}{t^2}dt = 2\sqrt{x}$。

微積分基本定理之二

定理 5.4.9. (微積分基本定理第二部份, 或求值定理) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續, 且 F 爲 f 的任一反導函數 , 則 $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$。

例 5.4.10. (1) 求 $\int_1^3 e^x dx$。

(2) 求 $\int_3^6 \frac{dx}{x}$。

例 5.4.11. 求曲線 $y=\cos x$ 從 $x=0$ 到 b 之下的面積。$(0\le b\le\frac{\pi}{2})$

例 5.4.12. 下列計算有何錯誤? $\int_{-1}^3 \frac{dx}{x^2} = \frac{x^{-1}}{-1}\Big|_{-1}^3 = -\frac{4}{3}$。

例 5.4.13. 求 $F(k)=\int_0^1 |x^2-kx|dx$ 的最小值 。

例 5.4.14. 令 $S(n)=\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S(n)}{n^\alpha}=C$, 求 α 及 C。

例 5.4.15. 設 $a<b$,

(a) 求 a,b 使得 $\int_a^b(x^4-5x^2+4)dx$ 爲極小值。

(b) 求 a,b 使得 $\int_a^b(x^4-10x^2+9)dx$ 爲極小值。

5.5 不定積分 (Indefinite Integral)

定義 5.5.1. $f(x)$ 之所有反導函數所成的集合記爲 $\int f(x)dx$, 稱爲 $f(x)$ 對 x 的不定積分 (indefinite integral)。$\int$ 稱爲積分號 (integral sign), f 稱爲被積分式 (integrand), x 稱爲積分變數 (variable of integration)。

5.5.2. 積分公式

(1) $\int dx = x + C$

(2) $\int x^n dx = \int \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n\ne -1$

(3) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

(4) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

(5) $\int \cos x dx = \sin x + C$

(6) $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$

(7) $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$

(8) $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$

(9) $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

(10) $\int e^x dx = e^x + C$

(11) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

(12) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + C$

(13) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + C$

(14) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} x + C$

(15) $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sinh^{-1} x + C$

(16) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \cosh^{-1} x + C$

註 5.5.3. 當一個不定積分之公式給出時, 我們的共識是它只在一個區間上成立。例如 $\int \frac{1}{x^2} dx = \frac{-1}{x} + C$ 表示若 $f(x) = \frac{1}{x^2}, x \neq 0$, 其反導函數是 $F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} + C_1, & x < 0 \\ -\frac{1}{x} + C_2, & x > 0 \end{cases}$ 。

例 5.5.4. 求以下不定積分:

(1) $\int (x^2 - 2x + 5) dx$。

(2) $\int (10x^4 - 2\sec^2 x) dx$。

(3) $\int \sec^2 x \tan x dx$。

(4) $\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} d\theta$。

例 5.5.5. 求以下定積分:

(1) $\int_0^3 \left(x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right) dx$。

(2) $\int_1^9 \frac{2t^2+t^2\sqrt{t}-1}{t^2} dt$。

(3) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 。

(4) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \sec x \tan x dx$ 。

例 5.5.6. (1) 求拋物線 $y = 6 - x - x^2$ 與 x-軸所圍成的區域面積。

(2) 求 x-軸與 $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ 之圖形間, 在 $-1 \leq x \leq 2$ 上所圍的面積。

(3) 令 $f(x) = \sin x$。求在 $[0, 2\pi]$ 上, $f(x)$ 之圖形與 x-軸所包圍出的區域面積。

<u>應用</u>

定理 5.5.7. 變化率的積分是淨變化量 (the net change) $\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$。

註 5.5.8. (1) 若 $V(t)$ 表容器內在時間 t 的水量, $V'(t)$ 爲時間 t 的進水率, 則 $\int_{t_1}^{t_2} V'(t)\, dt = V(t_2) - V(t_1)$ 爲從 t_1 到 t_2 水量的變化。

(2) 若 $[C](t)$ 表化學反應之生成物在時間 t 的濃度, $\frac{d[C]}{dt}$ 爲反應率, $\int_{t_1}^{t_2} \frac{dC}{dt} dt = [C](t_2) - [C](t_1)$ 爲從 t_1 到 t_2 C 的濃度變化。

(3) 一個棒子從左端到位置 x 的質量爲 $m(x)$, 則 $\rho(x) = m'(x)$ 爲線性密度。$\int_a^b \rho(x)dx = m(b) - m(a)$ 爲從 a 到 b 的質量。

(4) $\frac{dn}{dt}$ 爲人口成長率, 則 $\int_{t_1}^{t_2} \frac{dn}{dt} dt = n(t_2) - n(t_1)$ 爲從 t_1 到 t_2 的人口淨變化量。

(5) $C(x)$ 爲生產量 x 之成本, $C'(x)$ 爲邊際成本, 則 $\int_{x_1}^{x_2} C'(x)dx = C(x_2) - C(x_1)$ 爲產量從 x_1 到 x_2 所增加的成本。

(6) $s(t)$ 爲物體運動的位置函數, $v(t) = s'(t)$ 爲速度函數, 則 $\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = s(t_2) - s(t_1)$ 爲淨位移 (displacement)。

例 5.5.9. 一物體在一線上運動, 速度爲 $v(t) = t^2 - t - 6$。

(a) 求在 $1 \le t \le 4$ 的位移。

(b) 求這段時間所走的距離。

例 5.5.10. 一杯 95°C 的咖啡置於 20°C 的室內, 半小時後降爲 61°C, 則此半小時內咖啡的平均溫 度爲何?

例 5.5.11. 如圖是 2004年 12月 9日安大略省的 power consumption 之圖。估計這一天所耗費的能源 (energy)。

5.6 變數變換 (Change of Variables)

<u>變數變換</u>

定理 5.6.1. 若 $u = g(x)$ 爲可微函數, 且 f 在 g 的值域 上連續, 則 $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$。

例 5.6.2. (1) $\int \sqrt{1+y^2}2ydy$。

(2) $\int \sqrt{4t-1}dt$。

(3) $\int \frac{2z}{\sqrt[3]{z^2+1}}dz$。

(4) $\int x^2\sqrt{2+x^3}dx$。

(5) $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$。

例 5.6.3. (1) $\int \cos(7\theta+5)d\theta$。

(2) $\int x^2 \sin x^3 dx$。

(3) $\int x^3 \cos(x^4+2)dx$。

例 5.6.4. (1) $\int e^{5x}dx$。

(2) $\int x^2e^{x^3}dx$。

(3) $\int \frac{\ln x^2}{x}dx$。

例 5.6.5. (1) $\int \frac{1}{\cos^2 2x}dx$。

(2) $\int \sin^2 xdx$ 。

(3) $\int \cos^2 xdx$。

(4) $\int \sin^3 xdx$ 。

(5) $\int \cos^3 xdx$。

例 5.6.6. (1) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cos\sqrt{x}}dx$。

(2) $\int \sqrt{1+x^2}x^5dx$。

(3) $\int x^2\sqrt{2+x}dx$。

(4) $\int \sqrt{\frac{x-1}{x^5}}dx$。

(5) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$。

(6) $\int \tan xdx$。

(7) $\int \sec xdx$。

<u>定積分的變數變換</u>

定理 5.6.7. 若 g' 在 $[a,b]$ 上連續, f 在 g 之值域上連續, 則 $\int_a^b f'(g(x))g'(x)dx = \int_{g(b)}^{g(a)} f(u)du$。

例 5.6.8. (1) $\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$

(2) $\int_0^4 \sqrt{2x+1}dx$。

(3) $\int_{-1}^1 3x^2\sqrt{x^3+1}dx$。

(4) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot\theta\csc^2\theta d\theta$。

(5) $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$。

(6) $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$。

例 5.6.9. (1) 求 $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{nm}\frac{i^2n^3}{n^6+i^6}\right)$。

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(2n+k)(\ln(2n+k)-\ln n)^2}$。

例 5.6.10. 求圖形 $y=\sin^2 x$ 與 x-軸之間在 $[0,\pi]$ 上的面積。

例 5.6.11. 求一函數 $y=f(x)$ 定義在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上, 其導函數爲 $\frac{dy}{dx}=\tan x$, 且滿足 $f(0)=5$。

例 5.6.12. 解微分方程 $y'=\sec x, y(0)=4$。

例 5.6.13. 一電線的電壓爲 $V=V_{\max}\sin\pi t$, 求在 0 秒到 $\frac{1}{120}$ 秒之間的平均電壓。

例 5.6.14. 設 f 在 $[-a,a]$ 上連續。

(a) 若 f 爲偶函數, 則 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$。

(b) 若 f 爲奇函數, 則 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$。

例 5.6.15. (1) 求 $\int_{-2}^{2}(x^6+1)dx$。

(2) 求 $\int_{-1}^{1}\frac{\tan x}{1+x^2+x^4}dx$。

(3) 求 $\int_{-2015}^{2015}\ln(\pi x+\sqrt{1+\pi^2x^2})dx$。

例 5.6.16. 若 $\frac{d^2y}{dx^2}=4\sec^2 2x\tan 2x$, 且 $y'(0)=4, y(0)=1$, 求 $y(x)$。

例 5.6.17. (1) 求 $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$。

(2) 若 $f(x)$ 爲 $[0,\pi]$ 上的連續函數, 求 $\int_0^{\pi} f(\sin x)\cos^3 x dx$。

例 5.6.18. 若 $\int_0^4 e^{(x-2)^4}dx=k$, 求 $\int_0^4 xe^{(x-2)^4}dx$。

例 5.6.19. 令 $f_c(x)=\min\{(x-c)^2,(x-c-2)^2\}$ 且 $g(c)=\int_0^1 f_c(x)dx$。求 $g(c)$ 在 $-2\le c\le 2$ 上的極大値及極小値。

例 5.6.20. 證明: $\int_x^{xy}\frac{1}{t}dt=\int_1^y\frac{1}{t}dt$ 。

例 5.6.21. 證明: $y=\frac{1}{a}\int_0^x f(t)\sin a(x-t)dt$ 滿足 $\frac{d^2y}{dx^2}+a^2y=f(x), y'(0)=y(0)=0$。

例 5.6.22. 證明: $\int_0^x(\int_0^u f(t)dt)du=\int_0^x f(u)(x-u)du$。