第 4 章

導函數應用

目錄

(1) 平均值定理。

(2) 導函數在圖形上的意義。

(3) 作圖。

(4) 極值及其極值應用。

(5) 其他應用: 不定型, 牛頓法。

4.1 函數極值 (Extreme Values)

<u>相對極值</u>

定義 4.1.1. (1) 若存在 $c \in \operatorname{Dom} f$ 滿足: 存在一個包含 c 的開區間 (a, b), 使得 $\forall x \in (a, b)$, $f(x) \le f(c)$, 則稱 $f(x)$ 在 $x = c$ 有相對極大值 (或局部極大值, relative maximum or local maximum)。

(2) 若存在 $c \in \operatorname{Dom} f$ 滿足: 存在一個包含 c 的開區間 (a, b), 使得 $\forall x \in (a, b), f(x) \ge f(c)$, 則稱 $f(x)$ 在 $x = c$ 有相對極小值 (或局部極小值, relative minimum or local minimum)。

(3) 令 c 爲定義域區間的左端點, 若存在一個區間 $[c,b)$, 使得 $f(x) \le f(c), \forall x \in [c,b)$, 則稱 $f(x)$ 在 $x=c$ 有相對極大值。反之, 若使得 $f(x) \ge f(c)$, 則稱爲相對極小值。

(4) 令 c 爲定義域區間的右端點, 若存在一個區間 $(a,c]$, 使得 $f(x) \le f(c), \forall x \in (a,c]$, 則稱 $f(x)$ 在 $x=c$ 有相對極大值。反之, 若使得 $f(x) \ge f(c)$, 則稱爲相對極小值。

(5) 相對極大與相對極小值統稱相對極值。

定理 4.1.2. (Fermat) 若 $f(x)$ 在 D 之內點 c 有相對極值, 且 $f(x)$ 在 $x=c$ 可微, 則 $f'(c)=0$。

定義 4.1.3. 在 $f(x)$ 之定義域 D 的內點 c, 若 $f'(c)=0$ 或 $f'(c)$ 不存在, 則 c 稱爲 $f(x)$ 的臨界點 (critical point)。

註 4.1.4. $f(x)$ 的相對極值必發生在臨界點或邊界點。

例 4.1.5. 討論 $f(x)=x^3$ 及 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 的行爲。

例 4.1.6. 求 $f(x)=x^{\frac{3}{5}}(4-x)^2$ 的臨界點。

<u>絕對極值</u>

定義 4.1.7. (1) 令 $f(x)$ 定義在 D 上。若存在 $c \in D$ 使得 $f(x) \le f(c), \forall x \in D$, 則稱 f 在 D 上有絕對極大值 $f(c)$ (或全域極大值, absolute maximum or global maximum)。

(2) 若存在 $c \in D$ 使得 $f(x) \ge f(c), \forall x \in D$, 則稱 f 在 D 上有絕對極小值 $f(c)$ (或全域極小值, absolute minimum or global minimum)。

(3) 絕對極大值與絕對極小值統稱絕對極值 (extreme values)。

例 4.1.8. 分別討論以下函數的極值:

(1) $y=x^2$ 分別在 $(-\infty,\infty), [0,2], (0,2], (0,2)$ 上的極值。

(2) $f(x)=\cos x$。

(3) $f(x)=x^3$。

(4) $f(x)=3x^4-16x^3+18x^2$ 在 $[-1,4]$ 上。

定理 4.1.9. (極值定理 Extreme Value Theorem, Weierstrass 定理) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續, 則
(a) $f(x)$ 必有界。
(b) $f(x)$ 必存在絕對極大及絕對極小值。

[註] 在極值定理中, 將連續及閉區間之任一條件去掉, 則結論不一定成立。例如以下函數的極值:

(1) $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上。

(2) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2} & x=0, \\ 1-x & 0<x<1, \\ \frac{1}{2} & x=1, \end{cases}$ 在 $[0,1]$ 上。

例 4.1.10. $f(x)=\sin^2 x+\frac{|x|}{3}+x^4+\tan^{-1}x+\ln x$ 在 $[1,4]$ 上是否有絕對極大值?

註 4.1.11. 求連續函數 f 在閉區間 $[a,b]$ 上之絕對極值的方法:

(a) 求 f 在 (a,b) 上的臨界點;

(b) 求 $f(a)$ 及 $f(b)$;

(c) 比較 (a)、(b) 中各函數值。

例 4.1.12. 求以下函數的極值:

(1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ 在 $[-1,4]$ 之絕對極值。

(2) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ 在 $[-2,3]$ 上的絕對極值。

(3) $f(x) = x - 2\sin x$ 在 $[0,2\pi]$ 上的絕對極值。

(4) $f(x) = (x^2-3)\,e^x$ 的臨界點, 並求絕對極值。

(5) $f(x) = 10x(2-\ln x)$ 在 $[1,e^2]$ 上的絕對極值。

例 4.1.13. 求 $f(x) = e^{10|x-2|-x^2}$ 的絕對極值。

例 4.1.14. 火箭在 $t=0$ 發射, 直到 $t=126$ 太空船離開火箭時, 其速度爲 $v(t) = 0.0003968t^3 - 0.02752t^2 + 7.196t - 0.9397$。求這段時間內, 加速度的最大與最小值。

4.2 平均值定理 (Mean Value Theorem)

定理 4.2.1. (Rolle) 假設 $y=f(x)$ 滿足以下條件:

(a) 在 $[a,b]$ 上連續,

(b) 在 (a,b) 上可微,

(c) $f(a) = f(b)$,

則存在 $c \in (a,b)$, 使得 $f'(c) = 0$。

[註] 若 f 在 (a,b) 上不完全可微, 則此定理不一定成立。例:$f(x) = |x|$ 在 $[-1,1]$ 上。

定理 4.2.2. (平均值定理, Mean Value Theorem) 假設 $y=f(x)$ 滿足以下條件:

(a) 在 $[a,b]$ 上連續,

(b) 在 (a,b) 上可微,

則存在 $c \in (a,b)$, 使得 $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ [或 $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$]。

註 4.2.3. (平均值定理的另一型式) 若 f 在某一區間 I 上可微, $x_0, x_0+\Delta x \in I$, 則 $\nabla f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x$, 其中 $0<\theta<1$。

例 4.2.4. 就函數 $f(x) = x^3 - x$ 在 $[0,2]$ 上驗證平均值定理。

例 4.2.5. 若 $f(0) = -3$ 且 $f'(x) \le 5$, $\forall x$, 則 $f(2)$ 最大可能是多少?

例 4.2.6. 假設高速公路限速 90 公里/時, 高雄、台北距離 300 公里。一輛車上午 8:00 從台北出發, 11:00 到達高雄, 則該 車輛必有超速的時刻。

例 4.2.7. $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x$ 至少有一水平切線。

例 4.2.8. 方程式 $x^3 + 3x - 1 = 0$ 恰有一實根。

例 4.2.9. 證明 $|\tan x - \tan y| \geq |x - y|, \forall x, y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$。

例 4.2.10. (1) 設 f 在 $[a, b]$ 上連續, 在 (a, b) 上可微。若 $f = 0$ 在 $[a, b]$ 上有 r 個相異根, 則 $f' = 0$ 在 (a, b) 上至少有 $r - 1$ 個相異根。

(2) 多項式方程式 $f(x) = 0$ 在 $x = c$ 有 r 重根, 則 $f'(x) = 0$ 在 $x = c$ 恰爲 $r - 1$ 重根。

(3) 設 n 次多項式方程式 $p(x) = 0$ 有 n 個實根 (包括重根在內), 則 $p'(x) = 0$ 恰有 $n - 1$ 個實根。

例 4.2.11. 一個函數 $f(x)$ 若滿足: 存在 k, $0 < k < 1$, 使得對所有 $x_1, x_2 \in [a, b]$, $|f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$, 則稱 $f(x)$ 爲 $[a, b]$ 上的收縮函數 (contraction) 。

(a) 若 $f(x)$ 爲 $[a, b]$ 上的收縮函數, 證明 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上連續。

(b) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上連續, 在 (a, b) 上可微, 且對所有 $x \in (a, b)$, $|f'(x)| \leq k$, $0 < k < 1$, 證明 $f(x)$ 爲 $[a, b]$ 上的收縮函數。

推論 4.2.12. 若在 (a, b) 上每一點 x, $f'(x) = 0$, 則 $f(x)$ 爲一常數函數。

例 4.2.13. 證明 $\sin^{-1}(\frac{x-1}{x+1}) = 2\tan^{-1}\sqrt{x} - \frac{\pi}{2}$。

例 4.2.14. 試找一些函數 $f(x)$, 使 $f'(x) = \tan x \sec^2 x$。

推論 4.2.15. 若 $\forall x \in (a, b)$, $f'(x) = g'(x)$, 則存在一常數 C, 使得 $f(x) = g(x) + C$, $\forall x \in (a, b)$。

例 4.2.16. 求一函數 $f(x)$, 使其導函數爲 $\sin x$, 且圖形通過 $(0, 2)$。

例 4.2.17. 一車輛從靜止開始, 加速度爲 9.8 m/sec^2。求該車輛的速度函數及位置函數。

4.3 昇降性

定義 4.3.1. 令 $f(x)$ 定義在區間 I 上。

(a) 若對 I 上任兩點 $x_1 < x_2$, 均有 $f(x_1) < f(x_2)$, 則稱 $f(x)$ 在 I 上爲遞增 (或上昇, increasing)。

(b) 若對 I 上任兩點 $x_1 < x_2$, 均有 $f(x_1) > f(x_2)$, 則稱 $f(x)$ 在 I 上爲遞減 (或下降, decreasing)。

(c) 一個函數爲遞增或遞減, 統稱爲在 I 上單調 (monotonic)。

定理 4.3.2. 假設 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上連續, 在 (a, b) 上可微。

(1) 若 $f'(x) > 0, \forall x \in (a, b)$, 則 $f(x)$ 在 (a, b) 上遞增。

(2) 若 $f'(x) < 0, \forall x \in (a,b)$, 則 $f(x)$ 在 (a,b) 上遞減。

例 4.3.3. 求 $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ 的所有臨界點, 升降區間。求其極值。

例 4.3.4. (a) 證明: 當 $x \geq 0$ 時, $e^x \geq 1 + x$。

(b) 證明: 對 $x \geq 0$, 及任意正整數 n, 均有 $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ 。

例 4.3.5. 令 $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx$, 其中 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是實數, n 爲正整數。假設對所有 x, $|f(x)| \leq |\sin x|$, 證明 $|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1$。

4.4 凹凸性

定義 4.4.1. 令 $f(x)$ 爲 I 上的可微函數。若 f' 在 I 上遞增, 則稱 $y = f(x)$ 之圖形在 I 上爲上凹 (或凹向上, concave upward)。若 f' 在 I 上遞減, 則稱 $y = f(x)$ 之圖形在 I 上爲下凹 (或凹向下, concave downward)。

註 4.4.2. 若 $y = f(x)$ 之圖形在 I 上爲上凹, 則其圖形位於任一切線之上方; 若 $y = f(x)$ 之圖形在 I 上爲下凹, 則其圖形位於 任一切線之下方。

定理 4.4.3 (凹凸性之二階導數判別法)**.** 設 $f(x)$ 在 I 上二次可微。

(1) 若在 I 上, $f'' > 0$, 則 f 之圖形在 I 上爲上凹。

(2) 若在 I 上, $f'' < 0$, 則 f 之圖形在 I 上爲下凹。

例 4.4.4. 描述一函數 $f(x)$ 之圖形使其滿足以下條件,

(i) 在 $(-\infty, 1)$ 上, $f'(x) > 0$, 在 $(1, \infty)$ 上, $f'(x) < 0$;

(ii) 在 $(-\infty, -2)$ 及 $(2, \infty)$ 上, $f''(x) > 0$, 在 $(-2, 2)$ 上, $f''(x) < 0$;

(iii) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2, \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = 0$。

定義 4.4.5. 令 P 爲 $y = f(x)$ 之圖形上一點。若在 P 點連續, 且在該點凹凸性改變, 則稱此點爲**反曲點** (point of inflection)。

註 4.4.6. 若 $(x, f(x))$ 爲反曲點, 則 $f''(x)$ 不存在或 $f''(x) = 0$。

例 4.4.7. 討論以下函數之的升降、凹凸性及反曲點。

(1) $y = x^3$。

(2) $y = x^2$。

(3) $y = x^4$。

(4) $y = x^{1/3}$。

(5) $y = 3 + \sin x$, 在 $[0, 2\pi]$ 上。

(6) $y = x^4 - 4x^3$

例 4.4.8. 一物體在直線上運動, 其位置函數爲 $s(t) = 2t^3 - 14t^2 + 22t - 5$。求其速度及加速度函數, 並描述其運動。

例 4.4.9. 證明 $y = x \sin x$ 的反曲點必位於曲線 $y^2(x^2 + 4) = 4x^2$ 上。

4.5 極值

定理 4.5.1. (局部極值的一階導數判別法) 令 f 在 $[a,b]$ 上連續, $c \in (a,b)$, 且 f 在包含 c 的某一開區間上可微 (但 c 可能除外)。

(1) 當 x 從 c 的左側移到 c 的右側, $f'(x)$ 從負變為正, 則 f 在 c 點有局部極小。(即 $f'(c^-) < 0$, $f'(c^+) > 0$。)

(2) 當 x 從 c 的左側移到 c 的右側, $f'(x)$ 從正變為負, 則 f 在 c 點有局部極大。(即 $f'(c^-) > 0$, $f'(c^+) < 0$。)

定理 4.5.2. (局部極值之二階導數判別法) 假設 $f(x)$ 在包含 c 之某一開區間上連續。

(1) 若 $f'(c) = 0$ 且 $f''(c) < 0$, 則 f 在 $x = c$ 有局部極大。

(2) 若 $f'(c) = 0$ 且 $f''(c) > 0$, 則 f 在 $x = c$ 有局部極小值。

(3) 若 $f'(c) = 0$ 且 $f''(c) = 0$, 則無定論。

4.6 作圖

4.6.1. 作圖步驟如下:

(i) 定義域。

(ii) 對稱性、週期性。

(iii) 截距。

(iv) 漸近線。

(v) 解 $f'(x), f''(x) = 0$。

(vi) 製表。

(vii) 判斷昇降、凹凸區間, 極值, 反曲點。

(viii) 作圖。

例 4.6.2. 作圖 $f(x) = x^4 - 4x^3$。

例 4.6.3. (1) 作圖 $y = \frac{2x^2}{x^2-1}$。

(2) 作圖 $f(x) = \frac{(x+1)^2}{1+x^2}$。

(3) 作圖 $y = \frac{x^3}{x^2+1}$。

(4) 作圖 $f(x) = \frac{x^2+7x+3}{x^2}$。

(5) 作圖 $f(x) = \frac{8x+9}{x^3(x+1)}$。

例 4.6.4. (1) 作圖 $f(x) = e^{\frac{2}{x}}$。

(2) 作圖 $y = xe^x$。

(3) 作圖 $y = \ln(4 - x^2)$。

(4) 作圖 $y = x + \ln(x^2 + 1)$。

例 4.6.5. (1) 作圖 $f(x) = x^{4/3} - 4x^{1/3}$。

(2) 作圖 $f(x) = (x-1)x^{\frac{2}{3}}$。

(3) 作圖 $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(6-x)^{\frac{1}{3}}$。

例 4.6.6. (1) 作圖 $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}$。

(2) 作圖 $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$。

(3) 作圖 $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x^3}$。

(4) 作圖 $y = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ 。

例 4.6.7. (1) 作圖 $f(x) = x + 2\sin x$。

(2) 作圖 $f(x) = \sin^2 x - \cos x$。

(3) 作圖 $y = \frac{\cos x}{2+\sin x}$。

(4) 作圖 $y = e^x \sin x,\ x \in [-2\pi, 2\pi]$。

例 4.6.8. (1) 討論 $f(x) = \frac{x^2(x+1)^3}{(x-2)^2(x-4)^4}$ 之圖形。

(2) 討論 $f(x) = \sin(x + \sin 2x)$ 之圖形。

(3) 討論 $f(x) = \frac{1}{x^2+2x+c}$ 之圖形, 其中 c 在變動。

例 4.6.9. 考慮方程式 $(x-1)^{\frac{2}{3}} - (x+1)^{\frac{2}{3}} = c$, 則 c 分別在那個範圍內, 此方程式有 0 個解, 1 個解, 2 個解, 或更多個解 ?

4.7 不定形 (Indeterminate Forms)

<u>L'Hôpital 定律</u>

定理 4.7.1 (Cauchy 平均值定理)**.** 設 f 及 g 在 $[a,b]$ 上連續, 在 (a,b) 上可微, 且 $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a,b)$。則存在 $c \in (a,b)$, 使得 $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$。

定理 4.7.2 (L'Hôpital 定律, 初步型)**.** 假設 $f(a) = g(a) = 0$, $f'(a), g'(a)$ 存在, 且 $g'(a) \neq 0$。則 $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$。

定理 4.7.3 (L'Hôpital 定律, 加強型)**.** 假設 $f(a) = g(a) = 0$, f 及 g 在包含 a 的開區間 I 上可微, 且在 I 上, $g'(x) \neq 0$。若下式右側極限存在, 則 $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$。

註 4.7.4. (1) 以上的 L'Hôpital 定律所處理的極限記爲 $\frac{0}{0}$ 型, L'Hôpital 定律對 $\frac{\infty}{\infty}$ 型亦成立。
(2) L'Hôpital 定律對 $x \to a^+, x \to a^-, x \to \infty, x \to -\infty$ 均成立。
(3) $\frac{0}{0}$ 型、$\frac{\infty}{\infty}$ 型、$\infty \cdot 0$ 型、$\infty - \infty$ 型極限統稱爲不定形。另有指數型不定形。

$(\frac{0}{0})$ 型

例 4.7.5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x-\sin x}{x}$

例 4.7.6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x+x^2}$

例 4.7.7. $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x^2}$

例 4.7.8. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x-x}{x^3}$

例 4.7.9. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x+\sin x}{x}$

例 4.7.10. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$

例 4.7.11. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cot x-1}{x^2}$

例 4.7.12. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x-x}{x^3}$

例 4.7.13. $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\sin x}{1-\cos x}$

例 4.7.14. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

例 4.7.15. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}}{x^2}$

例 4.7.16. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$

例 4.7.17. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{xe^{2x}+xe^x-2e^{2x}+2e^x}{(e^x-1)^3}$

例 4.7.18. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\tan x}$

$(\frac{\infty}{\infty})$ 型

例 4.7.19. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x-2x^2}{3x^2+5x}$

例 4.7.20. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sec x}{1+\tan x}$

例 4.7.21. $\lim\limits_{\theta\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sec\theta}{\tan\theta}$

例 4.7.22. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{e^x}{x^2}$

例 4.7.23. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$

例 4.7.24. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

$(\infty \cdot 0)$ 型

例 4.7.25. $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x$

例 4.7.26. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$

例 4.7.27. $\lim\limits_{x\to \infty} (x\sin\frac{1}{x})$

$(\infty - \infty)$ 型

例 4.7.28. $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x})$

例 4.7.29. $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2})$

例 4.7.30. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\sec x - \tan x)$

例 4.7.31. $\lim\limits_{x\to \infty} \left[x - x^2\ln(\frac{1+x}{x})\right]$

指數型

例 4.7.32. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

例 4.7.33. $\lim\limits_{x\to \infty} x^{\frac{1}{x}}$

例 4.7.34. $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

例 4.7.35. $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+\sin 4x)^{\cot x}$

例 4.7.36. $\lim\limits_{x\to 0^+} (\frac{\sin x}{x})^{\cot x}$

例 4.7.37. $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sin x)^{\sin x - x}$。

例 4.7.38. (a) 證明: $f(x) = x^x$ 在 $[e^{-1}, \infty)$ 上爲嚴格遞增 。

(b) 若 $g(x)$ 爲 $f(x)$ 的反函數, 證明 $\lim\limits_{y\to\infty} \frac{g(y)\ln\ln y}{\ln y} = 1$。

例 4.7.39. 令 $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ 。 證明 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有任意階的導函數。

4.8 極值應用

例 4.8.1. 一個農莊有 1200 公尺長的竹籬, 要沿著河岸圍出一塊矩形農地, 則如何圍才使面積最大?

例 4.8.2. 利用 12×12 in^2 之鋁片, 在四個角切去四個小正方形以製作無蓋之盒子, 則所切之正方形邊長多少, 才使盒子容積最大?

例 4.8.3. 要製作尺寸如何之圓柱形罐頭, 使其容量爲 1 公升, 而所用的材料最省?

例 4.8.4. 求曲線 $y^2 = 2x$ 上, 與點 $(1,4)$ 最靠近的點。

例 4.8.5. 若 $f(x)$ 爲可微函數, P 爲 $y = f(x)$ 之圖形外之一點, Q 爲 $y = f(x)$ 之圖形上與 P 最近之點。證明: 線段 PQ 與 $f(x)$ 之圖形在 Q 正交。

例 4.8.6. 求曲線 $x^2 + xy + y^2 = 1$ 的最高及最低點。

例 4.8.7. 一個矩形內接於半徑爲 2 之半圓內, 則尺寸如何才使矩形面積最大?

例 4.8.8. 有一倒立的直圓錐, 內接在高爲 h, 底半徑爲 r 的直圓錐中, 則最大體積爲何?

例 4.8.9 (Fermat 原理及 Snell 定律)**.** Fermat 原理: 光線從 A 到 B 的路徑是使其所使用時間最短。
假設在第一種介質中, 其光速是 c_1, 在第二種介質中, 其光速是 c_2。求光線從第一種介質中之 A 點到第二種介質中之 B 點的路徑。

例 4.8.10. 在經濟上, 產生最大利潤時, 邊際收益必等於邊際成本。

例 4.8.11. 一家店在一星期可以賣出每片 350 元的 DVD 200 片。假設其價格與銷售量呈線性關係, 若每降價 10 元, 可以增加銷售量 20 片。則他要降價多少, 使收益 最大?

例 4.8.12. 一傢俱廠每天生產 5 件產品, 放在倉庫的倉儲費用爲每件每天 10 元。每經過 x 天便出貨一次, 每次出貨費用 5000 元, 則每經幾天出貨一次, 才使這些成本最低。

例 4.8.13. 在距海岸 12 哩處的海中有一鑽探平台, 在面對海岸處的沿岸距離 20 哩處有一煉製廠。現要接管線, 在水面上成本每哩50萬元, 在岸上每哩30萬元, 則該如何連結才使成本最低?

例 4.8.14. 有一道河寬 3km, 河岸上有一點 A, 對岸之點爲 C, 某人由 A 點出發要到對岸距離 C 8 公里處之 B 點。若他划船速度 6km/h, 在岸上走路 8km/h, 則他該在何處上岸才使時間最省?

例 4.8.15. 有 T 字型交叉路口, A 點在路口南方 1 公里處, B 點在路口東方 3 公里處。現有一車在 A 拋錨, 欲走到 B 點之修車廠 求援。在公路的速度是 5公里/小時, 在路旁林地的速度是 3公里/小時, 則該如何走才最省時?

例 4.8.16. 有一迴廊, 東西向及南北向之寬度分別爲 a, b。現有一長竿欲水平地穿過此迴廊, 則所容許的最長長度爲若干?

例 4.8.17. 有一張橫向寬 30 公分, 直向長 20 公分的紙張, 將右上角折向底邊, 如何才使折痕最短?

例 4.8.18. 在外切於橢圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 之矩形中, 面積最大者爲何? 面積最小者爲何?

4.9 牛頓法 (Newton Method)

4.9.1. 牛頓法. 欲解一方程式 $f(x) = 0$, 先適當選取方程式 $f(x) = 0$ 之根的第一個估計值 x_0, 再利用 $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ (若 $f'(x_n) \neq 0$), 陸續求出根的逼近值。

例 4.9.2. 以牛頓法求 $x^3 - 2x - 5 = 0$ 的根, 從 $x_1 = 2$ 開始估計。

例 4.9.3. 利用牛頓法估計 $\sqrt[6]{2}$, 精確到 8 位小數。

例 4.9.4. 估計 $\cos x = x$ 之根到小數 6 位。

例 4.9.5. 牛頓法失敗之例。

例 4.9.6. 試以牛頓法估計 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-r} & x \geq r \\ -\sqrt{r-x} & x < r \end{cases}$ 的根。

註 4.9.7. 事實上, 有一個$\{x_n\}$ 收斂的充分條件如下: 若 $\left|\frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}\right| < 1$ 在包含根 r 的某區間上均成立, 則在該區間上任取一點 x_0, $\{x_n\}$ 必收斂。

4.10 反導函數 (Antiderivatives)

定義 4.10.1. 一個函數 $F(x)$ 若滿足 $F'(x) = f(x), \forall x \in I$, 則稱 $F(x)$ 爲 $f(x)$ 在 I 上的反導函數。

定理 4.10.2. 若 $F(x)$ 爲 $f(x)$ 在 I 上的任一反導函數, 則最一般的反導函數是 $F(x) + C$, C 爲任意一個常數。

例 4.10.3. 如圖。作該函數的反導函數 $F(x)$ 之圖, 且 $F(0) = 2$。

例 4.10.4. 求下列各函數 $f(x) = x^5,\ g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}},\ p(x) = \cos\frac{x}{2} + 3\sqrt{x},\ q(x) = \frac{1}{x} + 2e^{2x}$ 的反導函數。

例 4.10.5. 求 $f(x) = \sin x$ 之反導函數 F, 且滿足 $F(0) = 3$。

例 4.10.6. 一物體作直線運動, 其加速度爲 $a(t) = 6t + 4$, 初速爲 $v(0) = -6$ cm/s, 起始地點爲 $s(0) = 9$ cm。求位置函數 $s(t)$。

例 4.10.7. 一氣球以 12 ft/sec 的速率上昇, 在離地 80 ft 處擲下一包裹, 則此包裹何時落地?

例 4.10.8. 在高度爲 140 m 的懸崖邊, 將一球以 15 m/sec 的速率往上拋, 則球所達到的最高高度爲何? 它何時到達地面?

定義 4.10.9. 求一函數 y, 使其滿足 $\frac{dy}{dx} = f(x)$, 則此式稱爲*微分方程* (differential equation), $y = F(x) + C$ 稱爲*通解* (general solution)。若取定 $y(x_0) = y_0$, 則稱其爲*起始值問題* (initial value problem); 滿足該條件的解稱爲特解 (particular solution)。

例 4.10.10. (1) 求 $y = g(x)$, 使得 $\frac{dy}{dx} = 4\sin x + \frac{2x^5 - \sqrt{x}}{x}$。

(2) 求 $y = f(x)$, 使得 $\frac{dy}{dx} = e^x + 20(1 + x^2)^{-1}$, 且 $f(0) = -2$。

(3) 求 $y = f(x)$, 使得 $\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 - 6x - 4$, 且 $y(0) = 4, y(1) = 1$。

例 4.10.11. 求一曲線, 使其在任一點 (x, y) 處的斜率爲 $3x^2$, 且通過 $(1, -1)$。

例 4.10.12. 一個雪球體積溶化的速度與表面積成正比。假設經 3 小時體積溶化一半, 則在何時完全溶化?