第 3 章
微分 (Differentiation)

目錄

(1) 由切線的概念導入微分。

(2) 定義導函數及導數。

(3) 導出微分的四則運算和合成運算的公式。

(4) 三角函數, 反三角函數與指數, 對數, 雙曲函數的微分。

(5) 隱函數微分。

(6) 微分應用, 包括變化率、相對速率及線性估計。

3.1 切線 (Tangents)

定義 3.1.1. (1) 曲線 $y = f(x)$ 在點 $P(a, b)$ 之斜率 (slope) 爲

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

(假設其極限存在。)

(2) 其切線 (tangent line) 爲通過 P, 且其斜率爲 m 的直線, 即

$$y = f(a) + m(x - a)。$$

(3) 其法線 (normal line) 爲通過 P 且與切線垂直的直線, 即

$$y = f(a) - \frac{1}{m}(x - a)。$$

註 3.1.2. 圓 C 在 P 點的切線 L, 滿足以下三特性: (a) L 與過 P 之半徑垂直, (b) L 與 C 只交於一點, (c) C 位於 L 的一側。但一般曲線上的切線不見得滿足以上條件。

例 3.1.3. (1) $y = mx + b$ 在其上任一點的切線爲本身。

(2) 求 $y = x^2$ 在點 $(2, 4)$ 的斜率, 並求其切線方程式。

(3) 求 $y = \frac{3}{x}$ 在點 $(3, 1)$ 的切線及法線方程式。

定義 3.1.4. (1) 設兩曲線相交於 P 點, 則此兩曲線在 P 點的交角 (angle between two curves) 定義爲它們過 P 點之切線的交角 。

(2) 若兩曲線在 P 點的交角爲直角, 則稱它們爲正交 (orthogonal)。

(3) 若兩曲線在 P 點的切線相同, 則稱它們爲相切。

3.2 導函數 (Derivatives)

導數與導函數

定義 3.2.1. (1) 令 $f(x)$ 爲一函數, 且 $a \in \mathrm{Dom}\, f$。假設極限 $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 存在, 則定義此極限 爲函數 $f(x)$ 在 $x = a$ 的導數 (derivative), 記爲 $f'(a)$, 且稱函數 $f(x)$ 在 $x = a$ 可微 (differentiable)。

(2) 對任一個可微點 a, 其對應一值 $f'(a)$; 此對應可定義一個函數 $f'(x)$, 稱爲 $f(x)$ 對於 x 的導函數 (derivative)。即

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \left(= \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right)。$$

導函數的定義域即爲所有可微之點。

註 3.2.2. (1) 求導函數的過程稱爲微分 (differentiation)。

(2) 給定 $y = f(x)$, 其導函數可記爲以下形式:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = Df(x) = D_x f(x) = \dot{f}(x)。$$

(3) 導數可記爲 $f'(a) = \frac{dy}{dx}\Big|_{x=a} = \frac{dy}{dx}\Big]_{x=a}$。

(4) 利用 Leibniz 的符號, 導函數的定義可表爲 $\frac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$。

例 3.2.3. 試描繪右圖中之函數的導函數圖形。

例 3.2.4. 討論以下各函數的導函數:

(1) $\frac{d}{dx}x^n$, $n \in \mathbb{N}$,

(2) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$,

(3) $\frac{d}{dx}\sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$。

例 3.2.5. 求 $\frac{d}{dx}\sqrt{x}$, 及 $y = \sqrt{x}$ 在 $x = 4$ 的切線, 法線方程式。

例 3.2.6. (a) 求過 $(1, 1)$, 且與 $y = x^2$ 相切的直線。

(b) 求過 $(-1, -1)$, 且與 $y = x^2$ 相切的直線。

例 3.2.7. 求 $y = 1 + x^2$ 及 $y = -1 - x^2$ 的公切線。

例 3.2.8. 若 P 及 Q 爲拋物線 $y = 1 - x^2$ 上分別在第一象限及第二象限之點, 在 P 點的切線分別交 y-軸及 x-軸於 A 及 B, 在 Q 點的切線分別交 y-軸及 x-軸於 A 及 C。求 P 及 Q 使得三角形 ABC 爲等邊三角形。

例 3.2.9. 若 $f(x)$ 在 $x = a$ 可微, 求 $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$。

例 3.2.10. 若 $f(x) = \frac{1+x+x^2+xe^x}{1-x+x^2-xe^x}$, 求 $f'(0)$。

例 3.2.11. 假設 $f(x)$ 爲一函數滿足 $|f(x)| \le x^2$, $\forall x$ 。

(a) 證明 $f(0) = 0$,

(b) 證明 $f'(0) = 0$。

例 3.2.12. 假設 $f(x)$ 爲一函數滿足 $f(x + y) = f(x) + f(y) + x^2y + xy^2$, $\forall x, y$, 並假設 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ 。

(a) 求 $f(0)$,

(b) 求 $f'(0)$,

(c) 求 $f'(x)$。

定義 3.2.13. (1) 若 $f(x)$ 在一開區間 (a, b) 上每一點均有導數, 則稱它在 (a, b) 上可微。

(2) 若 $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 存在, 則稱 $f(x)$ 在 $x = a$ 有*右導數* $f'_+(a)$;
若 $\lim\limits_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 存在, 則稱 $f(x)$ 在 $x = a$ 有*左導數* $f'_-(a)$。

(3) 若 $f(x)$ 在 (a, b) 上可微, 且在 $x = a$ 有右導數, 在 $x = b$ 有左導數, 則稱 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可微。

例 3.2.14. 討論以下各函數的導函數:

(1) $f(x) = |x|$,

(2) $f(x) = \lfloor x \rfloor$,

(3) $f(x) = \sqrt{|x|}$。

可微性與連續性

定理 3.2.15. 若 $f(x)$ 在 $x = a$ 可微, 則 $f(x)$ 在 $x = a$ 連續。

註 3.2.16. (1) $f(x)$ 在 $x = a$ 不可微的三種可能狀況:

(a) $f(x)$ 在 $x = a$ 不連續。

(b) $f(x)$ 在 $x = a$ 連續, 但 $f'_+(a) \neq f'_-(a)$, 稱爲拐點 (corner 或 kink)。

(c) $f(x)$ 在 $x = a$ 連續, 但 $\lim\limits_{x\to a} |f'(x)| = \infty$, 稱爲臍點 (cusp), 有垂直切線。

(2) (a) 一函數連續, 不見得可微。(例如 $f(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 處。)

(b) 一函數在 a 可微, 則必有切線。

(c) 一函數在 a 雖有切線, 但不必可微。(有垂直切線。)

定理 3.2.17. (Darboux, 導函數的中間值定理) 若 $f(x)$ 在 I 上可微, 且 $a, b \in I$, 則 $f'(x)$ 對 $f'(a)$ 及 $f'(b)$ 之間每一數均可取值。即: 對介於 $f'(a)$ 與 $f'(b)$ 之間的任意數 d, 皆存在 $c \in I$ 使得 $f'(c) = d$。

例 3.2.18. 是否存在 $\mathbb{R}$ 上的可微函數, 使其導函數是 $\lfloor x \rfloor$?

3.3 微分公式

定理 3.3.1. 假設 $f(x), g(x)$ 均可微。

(1) $\frac{d}{dx}(c) = 0$。

(2) $\frac{d}{dx}(c(f(x))) = c\frac{d}{dx}f(x)$。

(3) $\frac{d}{dx}(f \pm g) = \frac{d}{dx}f \pm \frac{d}{dx}g$。

(4) $\frac{d}{dx}(fg) = f\frac{dg}{dx} + g\frac{df}{dx}$。

(5) $\frac{d}{dx}(fgh) = \frac{df}{dx}gh + f\frac{dg}{dx}h + fg\frac{dh}{dx}$。 [此公式可推廣到 n 個函數的乘積。]

(6) $\frac{d}{dx}(\frac{f}{g}) = \frac{\frac{df}{dx}g - f\frac{dg}{dx}}{g^2}$。

例 3.3.2. 微分以下各函數:

(1) $f(t) = \sqrt{t}(a + bt)$,

(2) $g(x) = \frac{3x^2 + 2\sqrt{x}}{x}$,

(3) $y = \frac{(x^2 + \frac{1}{x})(x^3 + 3)}{x + 1}$ 。

例 3.3.3. (1) 若 $y = uv$, 且 $u(2) = 3$, $u'(2) = -4$, $v(2) = 1$, $v'(2) = 2$, 求 $y'(2)$。

(2) 若 $f(x) = \sqrt{x}g(x)$, 且 $g(4) = 2, g'(4) = 3$, 求 $f'(4)$。

例 3.3.4. 求

(1) $y = x^4 - 6x^2 + 4$ 的水平切線方程式。

(2) 求曲線 $y = x^3 + 2x^2$ 的所有法線, 使其通過 $(-2, 0)$。

例 3.3.5. 令 $f_{ij}(x)$爲可微函數。求行列式 $g(x) = \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & f_{13}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & f_{23}(x) \\ f_{31}(x) & f_{32}(x) & f_{33}(x) \end{vmatrix}$ 的導函數。

3.4 連鎖律 (Chain Rule)

定理 3.4.1. 若 $f(u)$ 在 $u = g(x)$ 處可微, $g(x)$ 在 x 處可微, 則合成函數 $f \circ g$ 在 x 處可微, $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ 或 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$。

例 3.4.2. 微分以下各函數:

(1) $y = (x^3 - 1)^{100}$,

(2) $y = (2x+1)^5(x^3 - 2x + 1)^4$,

(3) $f(t) = (\frac{t-2}{2t+1})^9$,

(4) $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}$,

(5) $h(x) = \sqrt[3]{x^2 + \sqrt{x^3 + 1}}$ 。

例 3.4.3. 證明 $y = \frac{1}{(1-2x)^3}$ 的每一條切線都是正斜率。

例 3.4.4. 若 f 爲可微函數使得 $f(g(x)) = x$, 且 $f'(x) = 1 + [f(x)]^2$, 求 $g'(x)$。

例 3.4.5. 若 $F(x) = f(xf(xf(x)))$, 且 $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f'(1) = 4$, $f'(2) = 5$, $f'(3) = 6$, 求 $F'(1)$。

3.5 高階導函數 (Higer-Order Derivatves)

3.5.1. 給定 $y = f(x)$, 可定義 $f'(x)$。可繼續定義 $f''(x) = (f'(x))'$, 稱爲 $f(x)$ 的二階導函數。同樣, 可定義 $f'''(x) = (f''(x))'$, $\ldots$, $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$。$f^{(n)}$ 稱爲 n 階導函數。

符號 3.5.2. $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} = D^n y$。

定理 3.5.3 (Leibniz)**.** $(fg)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)} g^{(n-i)}$, 其中 $f^{(0)} = f$, $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ 爲二項係數。

[註]

(1) 此處的符號 $\binom{n}{i}$ 即爲同學們在高中習慣使用的 C_i^n。

(2) 請將此定理與二項式定理 $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$ 比較之。

例 3.5.4. 求以下各例的 $y^{(n)}$.

(1) $y = x^3 - 3x^2 + 2$,

(2) $y = x^n$,

(3) $y=\frac{1}{2x+3}$,

(4) $y=\frac{1}{x^2-1}$,

(5) $y=\frac{1}{x^2-4x+3}$ 。

例 3.5.5. 證明 $\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)=\frac{(-1)^{n-1}n!c^{n-1}(ad-bc)}{(cx+d)^{n+1}}$。

例 3.5.6. (1) 求 $(\frac{x^3}{x^2-1})^{(96)}$。

(2) 求 $\frac{dx^n}{dx^n}\left(\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}\right)$。

註 3.5.7. 你是否可以猜測 出 $(f\circ g)^{(n)}(x)$ 的公式。事實上,

$$(f\circ g)^{(n)}(x)=\Sigma\frac{n!}{m_1!m_2!m_3!\cdots m_n!}f^{(m_1+m_2+m_3+\cdots+m_n)}(g(x))\Pi_{j=1}^{n}\left(\frac{g^{(j)}(x)}{j!}\right)^{(mj)},$$

其中求和符號 Σ 是對所有滿足 $1m_1+2m_2+3m_3+\cdots+nm_n=n$ 之非負整數 $(m_1,m_2,m_3,\cdots m_n)$ 求和。這公式稱爲 faà di Bruno(1825-1888) 公式。

例 3.5.8. 令 $f(x)=\frac{1}{(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}}$, $a\neq b,\alpha,\beta\neq 0$, 驗證下列敍述:

(a) 若 $\alpha+\beta+1=0$, 則存在 c 使得 $f''(x)=\frac{c}{(x-a)^{\alpha+2}(x-b)^{\beta+2}}$;

(b) 若 $\alpha+\beta=0$ 且 $a=b$, 則存在 c 使得 $f''(x)=\frac{c}{(x-a)^{\alpha+2}(x-b)^{\beta+2}}$;

(c) 若 $\alpha+\beta=0$ 且 $a\neq b$, 則存在 $c\neq 0$ 使得 $f''(x)=\frac{cx+d}{(x-a)^{\alpha+2}(x-b)^{\beta+2}}$;

(d) 此外, 則存在 $c\neq 0$ 使得 $f''(x)=\frac{cx^2+dx+e}{(x-a)^{\alpha+2}(x-b)^{\beta+2}}$ 。

例 3.5.9. 令 Legendre 多項式爲 $\chi_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\left[(x^2-1)^n\right]^{(n)}$。

(a) 證明 $(x^2-1)\chi_n''+2x\chi_n'-n(n+1)\chi_n=0$。

(b) 求 $\chi_n(1)$ 及 $\chi_n(-1)$。

3.6 隱函數微分 (Implicit Differentiation)

例 3.6.1. (a) 過圓 $x^2+y^2=25$ 上一點 $(3,-4)$ 的切線方程式爲何?

(b) 若$x^2+y^2=25$, 求 $\frac{dy}{dx}$ 及其上一點 $(3,-4)$ 的切線方程式。

例 3.6.2. (1) 若 $\frac{q}{p}\in\mathbb{Q}$, 求 $\frac{d}{dx}(x^{\frac{q}{p}})$。

(2) 求 $\frac{d}{dx}(1-x^2)^{3/4}$ 。

例 3.6.3. (1) 曲線 $x^3+y^3-2xy=0$ 上有一點斜率爲 -1, 求該點。

(2) 求曲線 $16x^4-12x^2y^2+y^4=80$ 上, 所有切線斜率爲 2 之點 。

例 3.6.4. 星形線 (astroid) 爲 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, a > 0$。證明過其上任一點的切線, 被座標軸截出線段長度爲一常數 。

[註] 試比較 $x^2 + y^2 = a^2$, $|x| + |y| = a$, 與 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 之圖形。

例 3.6.5. (1) 若 $x^4 + y^4 = 16$, 求 y''。

(2) 若 $x^2 + xy + y^3 = 1$, 求 $y'''|_{x=1}$。

例 3.6.6. (a) 若 $x^3 + y^3 = 6xy$, 求 y'。

(b) 過笛卡兒葉形線 (the folium of Descartes) $x^3 + y^3 = 6xy$ 上一點 $(3, 3)$ 的切線及法線方程式爲何?

(c) 曲線上哪一點的切線爲水平?

(d) 討論過原點的切線方程式。

例 3.6.7. 若一曲線族中的每一曲線均與另一曲線族的每一曲線正交, 則稱此兩曲線族爲*正交曲線族* (orthogonal trajectories)。

(1) 驗證 $y = ax^3$ 與 $x^2 + 3y^2 = b$ 爲正交曲線族。

(2) 證明 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 與 $\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$ 爲正交曲線族的充要條件爲 $A^2 < a^2$ 及 $a^2 - b^2 = A^2 + B^2$。

(3) 求 a 值, 使得 $y = (x + c)^{-1}$ 與 $y = a(x + k)^{1/3}$ 爲正交曲線族。

3.7 三角函數的導函數

定理 3.7.1. (1) $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$。

(2) $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$。

(3) $\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$。

(4) $\frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x$。

(5) $\frac{d}{dx} \sec x = \tan x \sec x$。

(6) $\frac{d}{dx} \csc x = -\cot x \csc x$。

例 3.7.2. 微分以下函數:

(a) $y = \sin(x^2)$,

(b) $y = \sin^2 x$ 。

例 3.7.3. 求以下函數的導函數:

(1) $g(t) = \tan(5 - \sin 2t)$,

(2) $f(x) = \sin(\cos(\tan x))$,

(3) $y = \sin(x^\circ)$。

例 3.7.4. 求 $y=\sin^5 x$ 在 $x=\pi/3$ 的切線方程式。

例 3.7.5. 求 $f(x)=\frac{\sec x}{1+\tan x}$ 的水平切線方程式。

例 3.7.6. (a) 證明 $\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$。

(b) 導出和 $\sin x+2\sin 2x+\cdots+n\sin nx$ 之公式。

例 3.7.7. 若 $\sin(x+y)=y^2\cos x$, 求 $\frac{dy}{dx}$。

例 3.7.8. $y=\sec x$, 求 y''。

例 3.7.9. 若 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\frac{\sec t-\sec x}{t-x}$, 求 $f'(\pi/4)$。

例 3.7.10. $y=\sin x$, 求 $y^{(n)}$。

例 3.7.11. 證明 $\frac{d^n}{dx^n}(\sin^4 x+\cos^4 x)=4^{n-1}\cos(4x+\frac{n\pi}{2})$。

例 3.7.12. $y=x^3\sin 2x$, 求 $y^{(102)}$。

例 3.7.13. 令 $f_n(x)=\begin{cases} x^n\sin\frac{1}{x} & x\neq 0; \\ 0 & x=0, \end{cases}$ 其中 n 爲非負整數。求滿足下列各條件之 n 值:
(a) 使其連續; (b) 使其可微; (c) 使其導函數連續; (d) 使其二階可微; (e) 嘗試推廣之。

3.8 反函數, 指數, 對數, 反三角函數之微分

反函數之微分

定理 3.8.1. 若 f 定義在區間 I 上, $f'(x)$ 在 I 上存在, 且均不爲 0, 則 f^{-1} 在 I 上可微, 且 $(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$。

[註]

(1) 此定理之幾何意義。

(2) 若一函數 $y=f(x)$ 可將其參數化爲 $x=t$, $y=f(t)$。則其反函數可參數化爲 $x=f(t)$, $y=t$。(參閱第 10 章。)

例 3.8.2. (1) $f(x)=x^2$, $x\geq 0$。求 $(f^{-1})'(x)$。

(2) $f(x)=x^3-2$, 求 $\frac{df^{-1}}{dx}|_{x=6}$。

(3) 令 g 爲 $f(x)=x^3+3x+1$ 的反函數, 求 $g'(5)$ 及 $g''(5)$。

自然指數函數之微分

性質 3.8.3. $\frac{d}{dx}(a^x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=(\lim\limits_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h})a^x$, 且 $\frac{d}{dx}(a^x)(0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$。

定義 3.8.4. 自然指數的底 e 是一個數, 滿足 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$ 。

定理 3.8.5. $\frac{d}{dx}(e^x)=e^x$。

例 3.8.6. 微分:

(1) $y = e^{\sec 3\theta}$ 。

(2) $y = \sin(x^2 + e^x)$ 。

例 3.8.7. (1) 求 $y = \frac{e^x}{x^2+1}$ 在 $P(1, \frac{e}{2})$ 的切線及法線方程式。

(2) 曲線 $y = e^x$上那一個點的切線平行於 $y = 2x$。

例 3.8.8. (a) 若 $f(x) = xe^{2x}$, 求 $f^{(n)}$。

(b) 若 $f(x) = x^2e^{2x}$, 求 $f^{(n)}$。

例 3.8.9. 求 $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{e^{\sin x}-1}{x-\pi}$。

<u>自然對數函數之微分</u>

定理 3.8.10. (1) $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$, $x > 0$。

(2) $\frac{d}{dx} \ln |x| = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$。

例 3.8.11. (1) 證明: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$。

(2) 證明: 對 $x > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$。

例 3.8.12. 微分:

(1) $y = \ln(x^3 + 1)$。

(2) $y = \ln(\sin x)$。

(3) $f(x) = \sqrt{\ln x}$。

(4) $y = \ln \frac{x+1}{\sqrt{x-2}}$。

例 3.8.13. 求 $y = \ln x$ 之切線, 使其通過原點。

例 3.8.14. 當 c 爲何値時, 圖形 $y = \ln x$ 及 $y = cx^2$ 恰交於一點?

<u>一般指數函數之微分</u>

定理 3.8.15. $\frac{d}{dx}a^x = \ln a \cdot a^x$ 。

定理 3.8.16. 對任意實數 r, $\frac{d}{dx}u^r = ru^{r-1}\frac{du}{dx}$。

例 3.8.17. 求:

(1) $\frac{d}{dx}3^{\sin x}$。

(2) $\frac{d}{dx}x^{\sqrt{2}}$。

(3) $\frac{d}{dx}(2 + \sin 3x)^\pi$ 。

(4) $\frac{d}{dx}\pi^{e^{x^{\sqrt{10}}}}$

<u>一般對數函數之微分</u>

定理 3.8.18. $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{\ln a}\frac{1}{x}$。

例 3.8.19. 求

(1) $\frac{d}{dx}\log(3x+1)$。

(2) $\frac{d}{dx}\log_5(2+\sin x)$ 。

<u>對數微分法</u> (logarithmic differentiation)

例 3.8.20. (1) 求 $\frac{dy}{dx}$, 其中 $y = \frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$

(2) 求 $\frac{d}{dx}(x^{\sqrt{x}})$, $x > 0$。

(3) 求 $\frac{d}{dx}(x^{x^x})$, $x > 0$。

(4) 求 $\frac{d}{dx}(\sin x)^{\ln x}$, $x > 0$。

例 3.8.21. 若 $x^y = y^x$, 求 y'。

註 3.8.22. 注意分辨以下四種類型函數的微分:

(1) $\frac{d}{dx}(a^b) = 0$,

(2) $\frac{d}{dx}[f(x)]^b = b[f(x)]^{b-1}f'(x)$,

(3) $\frac{d}{dx}[a^{g(x)}] = a^{g(x)}(\ln a)g'(x)$,

(4) $\frac{d}{dx}[f(x)]^{g(x)} = [f(x)]^{g(x)}\left[\frac{g(x)f'(x)}{f(x)} + g'(x)\ln f(x)\right]$。

<u>反三角函數之微分</u>

定理 3.8.23. (1) $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$,

(2) $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$,

(3) $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$,

(4) $\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = \frac{-1}{1+x^2}$,

(5) $\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, $|x| > 1$,

(6) $\frac{d}{dx}(\csc^{-1} x) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$, $|x| > 1$。

例 3.8.24. 微分:

(1) $y = \frac{1}{\sin^{-1}(x^2)}$,

(2) $f(x) = x\arctan\sqrt{x}$,

(3) $y = \sec^{-1}(5x^4)$,

(4) $f(x)=\sin^2(\cos^{-1}(\tan x^3)^{-2})$ 。

例 3.8.25. 令 $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin(|x|-1)}{|x|-1} & |x|>1;\\ \frac{4}{\pi}\tan^{-1}\frac{1}{x} & |x|\le 1, x\neq 0,\end{cases}$

(a) $f(x)$ 在那些點不連續? 那些是可除不連續?

(b) 求 $f(x)$ 的導函數。

例 3.8.26. 求 $y=\cot^{-1}x$ 在 $x=-1$ 的切線方程式。

例 3.8.27. 證明 $\frac{d}{dx}\sin^{-1}(\sin x)=\mathrm{sgn}(\cos x)$, 若 $x\neq(n+\frac{1}{2})\pi$, $n\in\mathbb{Z}$, 其中

$$\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}1 & x>0;\\ 0 & x=0;\\ -1 & x<0\text{ 。}\end{cases}$$

例 3.8.28. 若 $y=\tan^{-1}x$, 證明

(1) $y^{(n)}=(n-1)!\cos^n y\sin n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)$.

(2) $y^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!\left(1+x^2\right)^{-\frac{n}{2}}\sin\left(n\tan^{-1}\frac{1}{x}\right), x>0.$

(3) 求 $y^{(n)}(0)$。

例 3.8.29. 令 $y=\sin^{-1}x$, 求 $y^{(n+1)}$。

3.9 雙曲函數 (Hyperbolic Functions)

<u>雙曲函數及其導函數</u>

定義 3.9.1. 雙曲函數 (hyperbolic functions) 定義爲

(1) $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$,

(2) $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$,

(3) $\tanh x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$,

(4) $\coth x=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$,

(5) $\text{sech }x=\frac{2}{e^x+e^{-x}}$,

(6) $\text{csch }x=\frac{2}{e^x-e^{-x}}$。

註 3.9.2. (1) $\sinh(2x)=2\sinh x\cosh x$。

(2) $\cosh(2x)=\cosh^2 x+\sinh^2 x$。

(3) $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$。(可應用至雙曲線的參數式。)

例 3.9.3. 證明 $(\cosh x+\sinh x)^n=\cosh nx+\sinh nx$。

例 3.9.4. 若 $\tanh x = \frac{12}{13}$, 求其它雙曲函數之值。

定理 3.9.5. 雙曲函數之導函數爲

(1) $\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$,

(2) $\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$,

(3) $\frac{d}{dx}\tanh x = \text{sech }^2 x$,

(4) $\frac{d}{dx}\coth x = -\text{csch }^2 x$,

(5) $\frac{d}{dx}\text{sech } x = -\text{sech } x \tanh x$,

(6) $\frac{d}{dx}\text{csch } x = -\text{csch } x \coth x$。

例 3.9.6. $\frac{d}{dt}(\tanh\sqrt{1+t^2})$

<u>反雙曲函數及其導函數</u>

定義 3.9.7. 反雙曲函數爲

(1) $y = \sinh^{-1} x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

(2) $y = \cosh^{-1} x : [1, \infty) \to [0, \infty)$,

(3) $y = \tanh^{-1} x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

(4) $y = \coth^{-1} x : (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

(5) $y = \text{sech }^{-1} x : (0, 1] \to [0, \infty)$,

(6) $y = \text{csch }^{-1} x : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$。

註 3.9.8. 反雙曲函數可具體以對數函數表出如下:

(1) $\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}), x \in \mathbb{R}$,

(2) $\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}), x \geq 1$,

(3) $\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, |x| < 1$,

(4) $\coth^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}, |x| > 1$,

(5) $\text{sech }^{-1} x = \ln(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}), x \neq 0$,

(6) $\text{csch }^{-1} x = \ln(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}), |x| > 1$ 。

定理 3.9.9. 反雙曲函數之導函數爲

(1) $\frac{d(\sinh^{-1} x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \forall x$,

(2) $\frac{d(\cosh^{-1} x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, x > 1$,

(3) $\frac{d(\tanh^{-1} x)}{dx} = \frac{1}{1-x^2}, |x| < 1$,

(4) $\frac{d(\coth^{-1}x)}{dx}=\frac{-1}{1-x^2}$, $|x|>1$,

(5) $\frac{d(\text{sech}^{-1}x)}{dx}=\frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$, $0<x<1$,

(6) $\frac{d(\text{csch}^{-1}x)}{dx}=\frac{-1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$, $x\neq 0$。

例 3.9.10. 求 $\frac{d}{dt}(\tanh^{-1}(\sin x))$。

3.10 變化率 (Rate of Changes)

定義 3.10.1. 給定函數 $y=f(x)$,

(1) 在 x_1 處, x 的變化爲 $\triangle x=x_2-x_1$, 所對應 y 的變化爲 $\triangle y=f(x_2)-f(x_1)$。

(2) $\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ 稱爲 y 在 $[x_1,x_2]$ 上對 x 的平均變化率。

(3) $\frac{dy}{dx}=\lim\limits_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}$ 稱爲 y 對 x 的瞬時 變化率。(若此極限存在。)

例 3.10.2. 圓的面積爲 $A=\frac{\pi}{4}D^2$, D 爲直徑。求在 $D=10$ 時, 圓的面積對直徑的變化率 。

物理

定義 3.10.3. 若一物體直線運動, 在時間 t 的位置爲 $s=f(t)$, 則在時間 t,

(a) 物體的運動速度 (velocity) 爲 $v(t)=\frac{ds}{dt}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$。

(b) 速率 (speed) 爲 $|v(t)|=|\frac{ds}{dt}|$。

(c) 加速度 (acceleration) 爲 $a(t)=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}$。

(d) 急跳度 (jerk) 爲 $j(t)=\frac{da}{dt}=\frac{d^3s}{dt^3}$。

例 3.10.4. 一物體的位置函數爲 $s=f(t)=t^3-6t^2+9t$ (t 單位爲秒, s 單位爲公尺)

(a) 求時間 t 的速度。

(b) 求 $t=2$ 及 $t=4$的速度。

(c) 何時粒子靜止?

(d) 何時粒子向前 (即正向) ?

(e) 作圖表現粒子的運動。

(f) 求該粒子在前 5 秒鐘移動的總距離。

(g) 求時間 t 的加速度 。

(h) 何時粒子加速? 何時減速?

(i) 作 $0\le t\le 5$ 時, 位置、速度和加速度的函數圖形。

例 3.10.5. 一段電線其質量不均勻。從左端點算起到 x 公尺處, 質量爲 $m = f(x)$。則在 x 處的 (線性) 密度爲 $\rho = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle m}{\triangle x} = \frac{dm}{dx}$。

例如: 若 $m = \sqrt{x}$,$1 \le x \le 1.2$, 則在 $x = 1$ 的密度爲 $\rho = \frac{dm}{dx}\mid_{x=1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\mid_{x=1} = \frac{1}{2}$.

例 3.10.6. 在 $\triangle t$ 時, 通過一電線的靜電荷 (net charge) 爲 ΔQ, 則在時間 t 的電流 (current) 爲 $I = \lim\limits_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle Q}{\triangle t} = \frac{dQ}{dt}$.

<u>化學</u>

例 3.10.7. 例: 由 reactant A 和 B 經化學反應生成 product C, 即 $A + B \to C$。A 之濃度 (mole/liter) 記爲 $[A]$。C 的反應速率爲 $\lim\limits_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle [C]}{\triangle t} = \frac{d[C]}{dt} > 0$, $\frac{d[C]}{dt} = -\frac{d[A]}{dt} = -\frac{d[B]}{dt}$。

若 $aA + bB \to cC + dD$, 則 $-\frac{1}{a}\frac{d[A]}{dt} = -\frac{1}{b}\frac{d[B]}{dt} = \frac{1}{c}\frac{d[C]}{dt} = \frac{1}{d}\frac{d[D]}{dt}$。

<u>熱力學</u>

例 3.10.8. 在恆溫下, 物質的體積與壓力有關。$\frac{dV}{dP} < 0$, compressibility 定義爲 $\beta = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dP}$。
例如: 假設一物體在 $25°C$ 時, 體積與壓力的關係爲 $V = \frac{5.3}{P}$, 則在 $P = 50$kpa 時的 compressibility 爲 $\beta = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dP}\mid_{P=50} = 0.02\,(\mathrm{m}^3/\mathrm{kpa})\,/\mathrm{m}^3$。

<u>生物學</u>

例 3.10.9. 若 $n = f(t)$ 爲一種動物或植物在時間 t 時的個體數。其成長率爲 $\frac{dn}{dt}$。
例如: 細菌數目每小時加倍, 則 $f(t) = 2^t n_0, \frac{dn}{dt} = n_0 2^t \ln 2$。若 $n_0 = 100$, 則 4小時後爲 $\frac{dn}{dt}\mid_{t=4} = 1600 \ln 2 \approx 1109$。

例 3.10.10. 血管長 L, 半徑爲 R, 因管壁的摩擦力, 血液的速度與它和血管中心軸的距離 r 有關。laminar law (法國物理 學家 Jean-Louis-Movie Poiseuille 1840年發現) 爲 $V = \frac{P}{4\eta L}(R^2 - r^2)$, 其中 P 是血管兩端的壓力差, η 是血液的黏度。Velocity gradient 是 $\frac{dV}{dr}$。
例如: 設一個小孩的動脈是 $\eta = 0.027$,$R = 0.008$,$L = 2$cm,$P = 4000$dynes/cm^2, 在 $r = 0.002$cm 時, $\frac{dV}{dr} = -\frac{4000(0.0002)}{2(0.027)2} \approx -74$(cm/s)/cm。

<u>經濟</u>

例 3.10.11. 一工廠生產固定寬度的布料, 生產 x 公尺的成本是 $C = f(x)$。

(a) $f'(x)$ 的意義爲何? 單位爲何?

(b) $f'(1000) = 9$ 的意義爲何?

(c) $f'(500)$ 及 $f'(50)$, 你認爲哪一個比較大? $f'(5000)$ 呢?

定義 3.10.12. 若 $C(x)$ 爲生產量 x 時的成本函數 (cost function), 則生產的邊際成本 (marginal cost) 爲 $\frac{dc}{dx}$。($C'(n) \approx C(n+1) - C(n)$, 其意義爲每多生產一件產品時所增加的成本。)

例 3.10.13. 若 $C(x) = 10000 + 5x + 0.001x^2$, 則 $C'(500) = 15$,$C(501) - C(500) = 15.01$。$C'(500) \approx C(501) - C(500)$。

[註] 通常總成本爲 $C(x) = a + bc + cx^2 + dx^3$, a 爲固定成本 (overhead cost), 例如租金、維護費。其他項是變動成本, 材料的成本與 x 成正比, 但勞力成本可能與 x 較高冪次有關, 例如加班費 、工作效率等。

<u>其他科學</u>

3.10.14. 氣象學家要知道大氣壓力與高度的關係 。
地質學家關心岩漿在石頭中溫度冷卻的速度。
都市地理學家要知道一城市人口 密度與它和都市中心之距離的變化關係。
心理學家關心學習曲線。
社會學家關心流言傳播的速度。

3.11 指數成長與衰變(Exponential Growth and Decay)

3.11.1. 若一個量 y 在時間 t 時增加 (或減少) 的速度與在該時的量成正比, 在時間 $t = 0$ 時的量記爲 y_0。則 y 滿足初值問題 $y'(t) = ky(t)$, $y(0) = y_0, y > 0$。

定理 3.11.2. 以上的量滿足指數變化律 (law of exponential change), 即 $y = y_0 e^{kt}$。當 $k > 0$ 爲成長, $k < 0$ 爲衰變。k 稱爲成長常數。

例 3.11.3. 一曲線通過 $(0, 5)$, 且在曲線上任一點 P 之斜率均爲 P 之 y-座標的兩倍, 求該曲線。

3.11.4. 人口成長: $\frac{dP}{dt} = kP$, k 爲人口相對成長率。

例 3.11.5. 在 1950 年世界人口 25.60 億, 1960 年爲 30.40 億, 以此作出人口模式。人口相對成長率是多少? 估計 1993 年及 2020 年的人口數。

3.11.6. 放射性物質衰變: $\frac{dm}{dt} = -km$, k 爲相對衰變率。

例 3.11.7. 鐳-226半生期是 1590 年, 一個鐳的樣本重100 mg, 求 t 年後鐳之質量的公式; 求 1000 年後的質量, 何時剩下 30 mg?

3.11.8. 牛頓冷卻定律 (Newton's Law of Cooling): 令 $H(t)$ 爲物體在時間 t 的溫度, H_s 爲周圍環境的溫度, 則其滿足微方 $\frac{dH}{dt} = -k(H - H_s)$。由此得 $H = H_s + (H_0 - H_s)e^{-kt}$, H_0 是 $t = 0$ 的溫度。

例 3.11.9. 室溫 22°C 的汽水放入 7°C 的冰箱中。半小時後, 汽水的溫度是 16°C。(a) 再半小時溫度降到多少? (b) 須多久, 才會使溫度降到10°C。

3.11.10. 連續複利 (continuously compounded interest): 投資 A_0 元, 固定年利率爲 r, 採連續複利 , 則在 t 年後的本利和是 $A(t) = A_0 e^{rt}$。

例 3.11.11. 若在銀行存款 1000 元, 以連續複利 6% 計算, 3 年後的本利和是多少?

3.12 相對速率(Related Rates)

例 3.12.1. 將空氣注入球形氣球, 其體積以速率 100 cm^3/sec 增加, 則在直徑爲 50 cm 時, 其半徑增加速率爲何?

例 3.12.2. 5 m 長的梯子斜靠一牆, 其底部以 1 m/sec 速率滑開, 則在底部離牆脚 3 m 時, 梯子頂部下降速率若干?

例 3.12.3. 在一交叉路上, 警車正以 60 mile/hr 的速度向南開, 此時位置在交叉口北方 0.6 mile 處。一違規車輛在交叉口東方 0.8 mile 處往東開。警察以雷達測得兩車距離以 20 mile/hr 的速率增加, 求此時違規車的速率多少?

例 3.12.4. 有一高 4 公尺電線桿. 王先生在 9 公尺外放天燈, 天燈以 $\frac{1}{3}$ 公尺/秒的速率上升。則在高度爲 16 公尺時, 電線桿影子縮短的速率若干?

例 3.12.5. 一倒立的圓錐形容器, 高 4 m, 底半徑 2 m。現以 2 $\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$ 的速率倒入水, 則當水面高 3 m 時, 水面升高的速率爲若干 ? 並求加速度。

例 3.12.6. 一人在路上以 1.5 m/s 的速度走, 探照燈在距馬路 6 m 遠處持續照這人, 則這人位在距探照燈與馬路最近之點 8 m 處時, 探照燈轉動的速度若干?

例 3.12.7. 一個時鐘的時針長 8 mm, 分針長 4 mm, 則在 1 點時, 兩針針尖距離的變化率爲何?

例 3.12.8. 一粒子 P 在平面上運動, 時間 t, $t > 0$, 的位置是曲線 $xy + 2x = 2t$ 與 $y = x^2 t$ 的交點, 則在 $t = 2$ 時 P 與原點的距離 變化率爲何?

3.13 線性估計 (Linearizations)

定理 3.13.1. $f(x)$ 在包含 $x = a$ 的某個開區間上有定義, 則 $f'(a) = m$ 的充要條件爲

$$f(x) = f(a) + m(x - a) + r(x)(x - a),$$

其中 $r(x)$ 在 $x = a$ 連續, 且 $r(a) = 0$。

定義 3.13.2. (1) 若 $f(x)$ 在 $x = a$ 可微, 則函數 $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ 稱爲 f 在 a 的線性化 (linearization)。

(2) 此估計 $f(x) \approx L(x)$ 稱爲 f 在 a 的標準線性估計 (standard linear approximation), a 稱爲估計 中心 (center of approximation)。

例 3.13.3. (1) 求 $f(x) = \sqrt{3 + x}$ 在 $x = 0$ 及 $x = 1$ 的線性化。

(2) 求 $\sqrt{3.98}, \sqrt{4.05}$ 的估計值。

(3) 估計式 $\sqrt{x + 3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$ 在 x 爲何值時, 精確到 0.5 之內?

定義 3.13.4. 令 $y = f(x)$ 爲可微函數, dx 爲一獨立變數。微分 (differential) dy 定義爲 $dy = f'(x)dx$。

註 3.13.5. (微分的幾何意義及誤差) 若 $y = f(x)$ 在 $x = a$ 可微, 且 x 從 a 變化到 $a + \Delta x$, 則

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a) = f'(a)\Delta x + \epsilon\Delta x,$$

此處 $\Delta x \to 0$ 時, $\epsilon \to 0$。因此當 Δx 很小時, $\Delta y \approx dy$。此即 線性逼近定理 (linear approximation theorem)。

例 3.13.6. 若 $y = f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1$, 比較 Δy 和 dy, 其中:

(a) x 從 2 到 2.05;

(b) x 從 2 到 2.01;

例 3.13.7. 球半徑測量值爲 21 cm, 可能產生 0.05 cm 的誤差。則其計算球體積時會產生多少誤差?