第 2 章
極限 (Limits)

目錄

(1) 介紹極限的直觀意義

(2) 介紹各種極限的定義, 及一些計算技巧

(3) 圖形之漸近線

(4) 函數的連續性及中間值定理

2.1 極限的直觀

變化率

定義 2.1.1. $y=f(x)$ 在 $x\in[x_1,x_2]$ 上的平均變化率(average rate of change) 爲 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(x_1+h)-f(x)}{h}, h=x_2-x_1$ 。

例 2.1.2. 一顆球從 450 公尺高的 CN 塔上放下,

(1) 求它在前 5 秒的平均速度。

(2) 求它在第 5 秒到第 6 秒間的平均速度。

(3) 求它在第 5 秒的速度。

例 2.1.3. 討論拋物線 $y=x^2$ 在點 $P(1,1)$ 之切線的斜率。

極限的直觀

例 2.1.4. (1) 討論 $f(x)=\frac{3x+4}{x+5}$ 在 $x=-2$ 附近的行爲。

(2) Heaviside 函數定義爲 $H(t)=\begin{cases}0 & \text{if } t<0;\\ 1 & \text{if } t\geq 0,\end{cases}$ 討論在 $t=0$ 附近的行爲。

(3) 令

(a) $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$,

(b) $g(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1} & x\neq 1\\ 1 & x=1,\end{cases}$

(c) $h(x)=x+1$。

討論以上三函數在 $x=1$ 附近的行爲。

[註] 函數在 a 的極限與它在 a 的取值無關。

定義 2.1.5. (直觀) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ 表示: 當 x 很靠近 a 時, $f(x)$ 很靠近 L, 而且要有多接近, 就有 多接近。我們稱 $f(x)$ 在 $x=a$ 的極限 (limit) 爲 L。

[註] (i) x 很靠近 a 表示 x 同時從左側及右側很靠近 a , 且 $x\neq a$ 。

(ii) 正式的定義見第 5 節 。

例 2.1.6. 討論在 $x=0$ 的極限:

(a) $f(x)=\begin{cases}0 & x<0,\\ 1 & x\geq 0,\end{cases}$

(b) $g(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x\neq 0,\\ 0 & x=0,\end{cases}$

(c) $h(x)=\begin{cases}0 & x\leq 0,\\ \sin\frac{1}{x} & x>0。\end{cases}$

例 2.1.7. 由圖形猜測以下各極限值:

(1) $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$,

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$,

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{\pi}{x}$。

2.2 單側, 在無限遠之極限及無窮極限

(一) 單側極限 (One-Sided Limits)

例 2.2.1. 函數 $g(x)$ 如圖。討論以下各極限:
(a) $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)$, (b) $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$, (c) $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$, (d) $\lim\limits_{x\to 5^+} g(x)$, (e) $\lim\limits_{x\to 5^-} g(x)$, (f) $\lim\limits_{x\to 5} g(x)$ 。

例 2.2.2. (1) $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x-4} & \text{if } x > 4; \\ 8-2x & \text{if } x < 4, \end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to 4} g(x)$。

(2) 令 $f(x) = \sqrt{4-x^2}$, 求 $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$。

例 2.2.3. 求極限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0} |x|$,

(2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$,

(3) $\lim\limits_{x\to 3+} \lfloor x \rfloor$, $\lim\limits_{x\to 3-} \lfloor x \rfloor$, $\lim\limits_{x\to \pi} \lfloor x \rfloor$。

定理 2.2.4. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ 且 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$ 。

例 2.2.5. $\lim\limits_{x\to n} \lfloor x - \lfloor x-1 \rfloor \rfloor$, $n \in \mathbb{Z}$。

(二) 無窮極限 (Infinite Limits)

例 2.2.6. 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$ 。

例 2.2.7. 求 $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x-3}{x^2-4}$, $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x-3}{x^2-4}$, $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x-1}{x^2-4}$ 。

例 2.2.8. 求 $\lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2)^2}{x^2-4}$, $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x-2}{x^2-4}$。

例 2.2.9. 求 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x$, $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan x$。

例 2.2.10. 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x$ 。

(三) 在無限遠的極限(Limits at infinite)

例 2.2.11. 討論 $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{1}{x^r}$, $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x^r}$ (r 爲整數)。

例 2.2.12. 若 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + +a_0$, $a_n \neq 0$, 討論 $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$。

例 2.2.13. 描繪函數 $y = (x-2)^4(x+1)^3(x-1)$ 的圖形。

例 2.2.14. 求極限: $\lim\limits_{x\to \infty} \tan^{-1} x$, $\lim\limits_{x\to -\infty} \tan^{-1} x$, $\lim\limits_{x\to 2^+} \arctan(\frac{1}{x-2})$。

例 2.2.15. 求極限: $\lim\limits_{x\to \infty} e^x$, $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{1/x}$ $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x$。

2.3 極限的性質

四則運算的極限

定理 2.3.1. 若 $\lim_{x\to a} f(x) = L$ 且 $\lim_{x\to a} g(x) = M$, 則

(1) $\lim_{x\to a} c = c$, $\lim_{x\to a} x = a$,

(2) $\lim_{x\to a} kf(x) = kL$,

(3) $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = L \pm M$,

(4) $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = L \cdot M$,

(5) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$, 若 $M \neq 0$,

(6) $\lim_{x\to a} f(x)^\alpha = L^\alpha, \alpha \in \mathbb{Q}, L > 0$ 。

[註] 只要極限值 L, M 存在, 此定理對 ”單側極限” 及 ”在無限遠的極限” 均成立。

例 2.3.2. 在右圖中, 求 (1) $\lim_{x\to -2}[f(x) + g(x)]$, (2) $\lim_{x\to 1}[f(x)g(x)]$, (3) $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{g(x)}$。

例 2.3.3. (1) 若 $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, 則 $\lim_{x\to a} p(x) = p(a)$ 。
(2) 若 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 爲有理式, 且 $Q(a) \neq 0$, 則 $\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$ 。

例 2.3.4. 求 $\lim_{x\to -2} \sqrt{\frac{x^3+2x^2-1}{5-3x}}$ 。

例 2.3.5. 求極限:

(1) $\lim_{x\to \infty} \frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2}$, $\lim_{x\to -\infty} \frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2}$ 。

(2) $\lim_{x\to \infty} \frac{11x+1}{2x^3-1}$, $\lim_{x\to -\infty} \frac{11x+1}{2x^3-1}$ 。

(3) $\lim_{x\to \infty} \frac{3x^4-x-2}{5x^2+4x+1}$, $\lim_{x\to -\infty} \frac{3x^4-x-2}{5x^2+4x+1}$ 。

(4) $\lim_{x\to \infty} \frac{3x^3-x-2}{5x^2+4x+1}$, $\lim_{x\to -\infty} \frac{3x^3-x-2}{5x^2+4x+1}$ 。

三明治定理

定理 2.3.6. (1) 令 $c \in (a, b)$。若 $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b], x \neq c$, 且以下極限均存在, 則 $\lim_{x\to c} f(x) \leq \lim_{x\to c} g(x)$。
(2) [三明治定理, 夾擊定理 (Sandwich Theorem, Squeeze Theorem)] 若 $g(x) \leq f(x) \leq h(x), \forall x \in [a, b], x \neq c$, 且 $\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$, 則 $\lim_{x\to c} f(x) = L$。

註 2.3.7. 在 (1) 中, 若 $f(x) < g(x), \forall x \in [a, b], x \neq c$, 仍可能 $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x)$。

定理 2.3.8. 若 $f(x)$ 在 $x = a$ 附近爲有界, 且 $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, 則 $\lim_{x\to a}(fg)(x) = 0$ 。

例 2.3.9. 若 $1-\frac{x^2}{4}\le u(x)\le 1+\frac{x^2}{2}, \forall x\neq 0$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}u(x)$。

例 2.3.10. $\lim\limits_{\theta\to 0}\sin\theta$, $\lim\limits_{\theta\to 0}\cos\theta$ 。

例 2.3.11. 求極限:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$,

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}$,

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$。

例 2.3.12. 若 $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=0$, 則 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ 。

例 2.3.13. $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|L|$ 是否成立?

<u>三角函數的極限</u>

定理 2.3.14. $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ (θ 取弳度) 。

例 2.3.15. 求 $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\sin 2\theta}{3\theta}$。

例 2.3.16. 求 $\lim\limits_{x\to 0}x\cot x$。

例 2.3.17. 求極限:

(1) $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\sin(\theta-1)}{\theta-1}$,

(2) $\lim\limits_{\theta\to 1}\frac{\sin(\theta-1)}{\theta-1}$,

(3) $\lim\limits_{\theta\to 1}\frac{\sin(\theta-1)^2}{\theta-1}$。

例 2.3.18. 求極限:

(1) $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\cos\theta-1}{\theta}$,

(2) $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\cos\theta-1}{\theta^2}$。

例 2.3.19. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\tan x\sin\frac{1}{x}$。

例 2.3.20. 求極限:

(1) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi}{2}x$,

(2) $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec\theta-\tan\theta}{\theta-\frac{\pi}{2}}$ 。

例 2.3.21. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan a|x|}{\sqrt{1-\cos bx}}$, $b\neq 0$。

例 2.3.22. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$。

2.4 極限之綜合例題

例 2.4.1. 求極限:

(1) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-9}{h}$,

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\{\frac{1}{x+3}-\frac{2}{3x+5}\}$ 。

例 2.4.2. 求極限:

(1) $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$,

(2) $\lim\limits_{x\to 27}\frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}-2}{x-27}$,

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$,

(4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x}{5-x-\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}-\sqrt[5]{x}}$。

例 2.4.3. 求極限:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$,

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$,

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}})$。

例 2.4.4. 求極限:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{5}{2}}[\sqrt{x+3}-3\sqrt{x+2}+3\sqrt{x+1}-\sqrt{x}]$,

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^4}-\sqrt[3]{1-2x^4}}{x(1-\cos x)\tan(\sin x)}$ 。

例 2.4.5. 令 $f(x)=x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}$。
求 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 。

例 2.4.6. (1) 求 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[146]{|x|}}{\sqrt[7]{10^7+\sqrt[3]{10^3+\sqrt[7]{x+10^7}}}}$,

(2) 令 $f(x)=\frac{\sqrt{9x^2+1}}{x+4}$。
求 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 。

例 2.4.7. 令 $f(x)=\frac{|x|-x}{|x|-x^3}$。
求 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$, $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$。

例 2.4.8. 令 $f(x)=(3^x+4^x+5^x)^{\frac{1}{x}}$。
求 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$。

例 2.4.9. (1) 令 $f(x)=\frac{3^{\frac{1}{x}}-3^{-\frac{1}{x}}}{3^{\frac{1}{x}}+3^{-\frac{1}{x}}}$。
求 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$。

(2) 令 $f(x)=\frac{1+2^{1/x}}{3+2^{1/x}}$。
求 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 。

例 2.4.10. (a) $\lim\limits_{x\to2^-}\lfloor x+\lfloor x+\lfloor x\rfloor\rfloor\rfloor$,
(b) $\lim\limits_{x\to2^+}\lfloor x+\lfloor x+\lfloor x\rfloor\rfloor\rfloor$ 。

例 2.4.11. 令 $f(x)=\frac{\lfloor x\rfloor}{x}$。
求 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$。

例 2.4.12. 令 $f(x)=\frac{\lfloor x\rfloor-2}{\lfloor x^2\rfloor-4}$。
求 $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)$ 。

例 2.4.13. 令 $f(x)=\frac{\lfloor x^2\rfloor-\lfloor x\rfloor^2}{x^2-1}$ 。
求 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 。

例 2.4.14. 求以下極限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\lfloor x\rfloor\sin x$,

(2) $\lim\limits_{x\to0}\lfloor\frac{1}{x}\rfloor x$,

(3) $\lim\limits_{x\to0}\lfloor\frac{1}{x}\rfloor x^2$,

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-\lfloor x\rfloor}{3x+4}$,

(5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-\lfloor x\rfloor}{3x+2}$。

例 2.4.15. (1) 假設 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{ax+b}-2}{x}=1$, 求 a,b 之值。

(2) 假設 $\lim\limits_{x\to-\infty}(ax-\sqrt{4x^2+bx+1})=3$, 求 a,b 之值 。

例 2.4.16. 假設 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=5$。

(a) 求 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$,

(b) 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$ 。

2.5　極限的定義(Definitions of Limit)

定義 2.5.1. 令 $f(x)$ 在包含 $x=a$ 的某一開區間上有定義。若 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ 使得 $0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$, 則稱爲 $f(x)$在 x 趨近於 a 時的極限爲 L, 記爲 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ 。

註 2.5.2. (1) 定義中的 δ 不爲唯一。若對某一 δ 成立, 則對任意 $\delta'<\delta$ 均成立。

(2) 當 $f(x)$ 在 $x=a$ 有極限, 則極限值爲唯一。因此 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ 是妥善定義的 (well-defined)。

例 2.5.3. 證明 $\lim\limits_{x\to 3}(4x-5)=7$。

例 2.5.4. 證明 $\lim\limits_{x\to 3} x^2=9$。

例 2.5.5. 證明 $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{x-1}=2$。

例 2.5.6. 證明 $\lim\limits_{x\to 5}\frac{1}{x}=\frac{1}{5}$。

例 2.5.7. 令 $D(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q};\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\text{ 。}\end{cases}$ 證明: 在每一點 $D(x)$ 的極限值均不存在。

定義 2.5.8. (1) 若 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ 使得 $a<x<a+\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$, 則稱 $f(x)$ 在 a 的右極限爲 L, 記爲 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L$。
(2) 若 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ 使得 $a-\delta<x<a \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$, 則稱 $f(x)$ 在 a 的左極限爲 L, 記爲 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L$。

例 2.5.9. 證明 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$。

定義 2.5.10. (1) $\forall\varepsilon>0,\exists M$ 使得 $x>M \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$, 則稱 x 趨近 ∞ 時, $f(x)$ 的極限爲 L, 記爲 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=L$。
(2) $\forall\varepsilon>0,\exists M$ 使得 $x<M \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$, 則稱 x 趨近 $-\infty$ 時, $f(x)$ 的極限爲 L, 記爲 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$。

例 2.5.11. 證明 (a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$,　(b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ 。

定義 2.5.12. (1) 若 $\forall B>0$, 則 $\exists\delta>0$, 使得 $0<|x-a|<\delta \Rightarrow f(x)>B$, 稱爲在 x 趨近 a 時, $f(x)$ 的極限爲無限大, 記爲 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$。
(2) 若 $\forall B<0$, 則 $\exists\delta>0$, 使得 $0<|x-a|<\delta \Rightarrow f(x)<B$, 稱爲在 x 趨近 a 時, $f(x)$ 的極限爲負無限大, 記爲 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$。

例 2.5.13. 證明 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$。

例 2.5.14. 利用極限的定義證明: 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ 且 $\lim\limits_{x\to a} g(x)=M$, 則 $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=L+M$ 。

2.6 漸近線(Asympotes)

定義 2.6.1. (1) 若 $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ 或 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$, 則 $y = b$ 稱為 $y = f(x)$ 之 水平漸近線。

(2) 若 $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ 或 $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$, 則 $x = a$ 稱為 $y = f(x)$ 之垂直漸近線。

(3) 若 $\lim_{x\to\pm\infty} |f(x) - (mx + b)| = 0$, 則 $y = mx + b$ 稱為 $y = f(x)$ 的斜漸近線 (Oblique Asymptote)。

註 2.6.2. 斜漸近線 ($m \neq 0$, 且 m 存在。) 之求法: $m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - mx)$。

例 2.6.3. 在右圖中的函數 $f(x)$, 求無限極限, 在無窮遠的極限和漸近線。

例 2.6.4. 求以下函數的漸近線:

(1) $y = \frac{3x^2-x-2}{5x^2+4x+1}$,

(2) $y = \frac{x^2-3}{2x-4}$,

(3) $f(x) = \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$ 。

例 2.6.5. 求以下函數的漸近線:

(1) $f(x) = \sin\frac{1}{x} + 2.$

(2) $y = 2 + \frac{\sin x}{x}$ 。

[註] 漸近線可能與曲線交無限多個點 。

例 2.6.6. 討論 $y = \tan x$ 及 $y = \sec x$ 的漸近線。

例 2.6.7. 求 $y = e^x$ 及 $y = \ln x$ 的漸近線。

例 2.6.8. 求 $f(x) = \frac{\sqrt{x^6+3x^5}+x^3-3}{x^2-x}$ 的所有漸近線。

2.7 連續性(continuity)

定義

例 2.7.1. 令 $y = f(x)$ 如圖。討論 $y = f(x)$ 在哪些點連續?

定義 2.7.2. (1) 若 $y = f(x)$ 滿足以下三條件: (i) $f(a)$ 有定義。 (ii) $\lim_{x\to a} f(x)$ 存在。 (iii) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, 則稱 $f(x)$ 在點 a 連續。

(2) 若滿足 $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$, 則稱 $f(x)$ 在點 a 為右連續。

(3) 若滿足 $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$, 則稱 $f(x)$ 在點 a 為左連續。

註 2.7.3. (1) $f(x)$ 在 $x = a$ 連續, 若且唯若 $\lim_{x\to a} f(x) = f(\lim_{x\to a} x)$。

(2) “連續”是局部性概念。

註 2.7.4. 不連續有以下幾類, 如圖

(1) 可除性不連續 (removable discontinuity), 可重新定義 $f(x)$ 在不連續點之值, 以去除此點之不連續性,

(2) 跳動性不連續 (jump discontinuity),

(3) 無限不連續 (infinite discontinuity),

(4) 振盪不連續 (oscilating discontinuity)。

例 2.7.5. 以下函數在哪些點不連續?

(1) $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x-2}$,

(2) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{if } x \neq 0; \\ 1 & \text{if } x = 0, \end{cases}$

(3) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x-2} & \text{if } x \neq 2; \\ 1 & \text{if } x = 2, \end{cases}$

(4) $f(x) = \lfloor x \rfloor$。

定義 2.7.6. (1) 若 b 爲一區間的右端點, 且 $f(x)$ 在點 b 爲左連續, 則稱 $f(x)$ 在邊界點 b 連續。

(2) 若 a 爲一區間左端點, 且 $f(x)$ 在點 a 爲右連續, 則稱 $f(x)$ 在邊界點 a 連續。

定義 2.7.7. (1) 若 $f(x)$ 在一區間 I 在每一點連續, 則稱它在 I 上連續。

(2) 若 $f(x)$ 在其定義域上每一點連續, 則稱其爲連續函數 (continuous function) 。

例 2.7.8. 證明 $f(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$ 在 $[-1, 1]$ 連續。

五則運算的連續性

定理 2.7.9. (1) 若 f 及 g 在 $x = a$ 連續, 則 $f+g, f-g, f \cdot g, kf, f^\alpha, \frac{f}{g}$ (若 $g(a) \neq 0$) 均在 $x = a$ 連續。

(2) 若 f 在 $x = a$ 且 g 在 $f(a)$ 連續, 則 $g \circ f$ 在 $x = a$ 連續。

定理 2.7.10. 若 $g(x)$ 在 $x = b$ 連續且 $\lim_{x \to a} f(x) = b$, 則 $\lim_{x \to a} g(f(x)) = g(\lim_{x \to a} f(x)) = g(b)$。

例 2.7.11. 令 $f(x) = \begin{cases} x & x \neq 0; \\ 1 & x = 0, \end{cases} \quad g(x) = x^2, \quad \forall x$ 。
則 $\lim_{x \to 0} f(g(x)) \neq f(\lim_{x \to 0} g(x))$。

定理 2.7.12. (1) 多項式函數, 有理函數, 根式函數均爲連續函數。

(2) 三角函數, 反三角函數均爲連續函數。

(3) 指數函數, 對數函數均爲連續函數。

例題

例 2.7.13. $f(x) = \frac{\ln x + \tan^{-1} x}{x^2 - 1}$, $g(x) = \sin(x^2)$, $h(x) = \ln(1 + \cos x)$ 均爲連續函數。

例 2.7.14. 求 $\lim\limits_{x \to 1} \sin^{-1}(\frac{1-x}{1-x^2})$。

例 2.7.15. 若 $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{if } x < a; \\ x^2 & \text{if } x \geq a, \end{cases}$ 求 a 使其連續。

例 2.7.16. 令 $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q}; \\ 0 & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$ 則 $f(x)$ 在每一點都不連續。

例 2.7.17. 令 $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q}; \\ x^3 & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$ $f(x)$ 在哪些點連續?

例 2.7.18. 求 a, b 之值使得 $f(x)$ 成爲連續函數, 其中

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{若 } x < 2, \\ ax^2 - bx + 3 & \text{若 } 2 \leq x < 3, \\ 2x - a + b & \text{若 } x \geq 3 \text{ 。} \end{cases}$$

例 2.7.19. 令 $f(x) = \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$。

(a) 對哪些 a, $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ 存在?

(b) 在哪些點 $f(x)$ 不連續?

例 2.7.20. 若 f 及 g 均在 $x = 0$ 連續, 則 $g \circ f$ 是否在 $x = 0$ 連續?

例 2.7.21. (Dirichlet Ruler 函數) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, (m,n) = 1, n > 0; \\ 0 & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$ 則:

(1) $f(x)$ 在有理點上不連續。

(2) $f(x)$ 在無理點上連續。

2.8 中間值定理 (Intermediate Value Theorem)

定理 2.8.1. (中間值定理) 若 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上連續, 則對 $f(a)$ 及 $f(b)$ 間每一數均可取值。即對任意介於 $f(a)$ 及 $f(b)$ 之間的 d, 皆存在 $c \in [a, b]$, 使得 $f(c) = d$。

推論 2.8.2. (勘根定理) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上連續, 且 $f(a)$ 及 $f(b)$ 異號, 則存在 $c \in (a, b)$, 使得 $f(c) = 0$。

註. (1) 對不連續函數, 中間值定理不見得成立。
例: 令 $f(x) = \begin{cases} x+2 & -1 < x \leq 1, \\ x & -2 \leq x \leq -1 \text{ 。} \end{cases}$ 此時 $f(-2) < 0$, $f(1) > 0$, 但 $f(x) = 0$ 無解。

(2) 中間值定理只保證根的存在, 根的數目甚至可能有無限多。
例: 令 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0 \text{ 。} \end{cases}$ 在 $[-\frac{2}{3\pi}, \frac{2}{\pi}]$ 上有無限多個 x, 滿足 $f(x) = 0$ 。

例 2.8.3. 證明方程式 $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$ 在 $1, 2$ 之間有解。

例 2.8.4. 奇數次多項式方程式必有實根。

例 2.8.5. 證明曲線 $y = x^3$ 與 $y = 3x + 1$ 必相交。

例 2.8.6. 令 a, b 爲正數, 證明方程式 $\frac{a}{x^3+2x^2-1} + \frac{b}{x^3+x-2} = 0$ 在 $(-1, 1)$ 上至少有一根。

例 2.8.7. 令 $f(x)$ 爲 $[a, b]$ 上的連續函數, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a, b]$。證明必存在 $c \in [a, b]$, 使得 $f(c) = \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$ 。

例 2.8.8. (固定點定理) 令 $f(x)$ 爲 $[0, 1]$ 對應到 $[0, 1]$ 的連續函數, 則必存在 $c \in [0, 1]$, 使得 $f(c) = c$ 。

例 2.8.9. 令 $f(x)$ 爲定義在 $[0, 1]$ 上的連續函數, 且 $f(0) = f(1)$。若 n 爲大於 1 的正整數, 則必存在 $c \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$, 使得 $f(c) = f(c + \frac{1}{n})$ 。

例 2.8.10. 平面上有界區域 K, 若其中任兩點的連線段仍在 K 中, 則稱爲凸集合 (convex set), 。現平面上有一直線 L 及一凸集合 K, 證明必存在一條與 L 平行之直線將 K 的面積二等分。

例 2.8.11. 在地球的赤道上, 必有一對對徑點 (antipodal) , 其氣溫相等。

例 2.8.12. 有一四腿等長之圓桌放在地面上, 此地面高低不平, 但爲連續性起伏。證明: 將此圓桌順時針 (或逆時針) 至多轉 $90°$, 必可使桌子平穩。