第 1 章

函數 (Functions)

目錄

(1) 介紹有關函數的一些基本觀念

(2) 介紹一些基本函數的圖形

(3) 介紹指數函數, 對數函數, 三角函數與反三角函數

1.1 一些基本概念

數

符號 1.1.1. (1) 我們以下列符號來表示各數系:
$\mathbb{N}$ 自然數系 (正整數, natural numbers),
$\mathbb{Z}$ 整數系 (integers),
$\mathbb{Q}$ 有理數系 (rational numbers),
$\mathbb{R}$ 實數系 (real numbers),
$\mathbb{C}$ 複數系 (complex numbers)。

(2) $\forall$ 表示 “對所有”(for all) ,
$\exists$ 表示 “存在”(there exists),
$\exists!$ 表示 “存在唯一”(there is a unique)。

例 1.1.2. 解以下各方程式:

(1) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$,

(2) $\frac{2x}{x+1} = \frac{2x-1}{x}$,

(3) $2x(4-x)^{-1/2} - 3\sqrt{4-x} = 0$。

定義 1.1.3. 一直線上任選一點 O, 稱爲原點 (origin), 對應實數 0 。適當選一長度爲單位長, 對任一正實數 a, 對應直線上原點右邊距離 a 單位之點; 任一負實數 $-a$ 對應直線上原點左邊距離 a 單位之點。則實數稱爲該點之座標 (coordinate), 此直線稱爲座標線 (coordinate line)。

集合

定義 1.1.4. 一組物件合稱爲一個集合 (set), 這些物件稱爲元素 (element) 。若 S 爲一集合, $x \in S$ 表示 x 爲 S 之元素。

註 1.1.5. 集合有兩種描述法:

(1) 表列法 $\{a_1, a_2, \cdots\}$;

(2) 描述特性法 $\{x : x$ 滿足某性質$\}$。

定義 1.1.6. (1) 若 S, T 爲集合。則 $S \cup T = \{x | x \in S$ 或 $x \in T\}$ 稱爲 S 與 T 的聯集 (union); $S \cap T = \{x | x \in S$ 且 $x \in T\}$ 稱爲 S 與 T 的交集 (intersection)。

(2) 令 $S_1, S_2, S_3, \cdots$ 爲一序列集合, 則

$$\bigcup_{i=1}^{n} S_i \quad \text{表示} \quad S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n,$$
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \quad \text{表示} \quad S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \cdots 。$$

交集符號也有同樣表法。

區間

定義 1.1.7. (1) 有限區間:

(i) 開區間 (open intervals): $(a, b) = \{x |\ a < x < b\}$;

(ii) 閉區間 (closed intervals): $[a, b] = \{x |\ a \le x \le b\}$;

(iii) 半開區間: $[a, b) = \{x |\ a \le x < b\}$,
$(a, b] = \{x |\ a < x \le b\}$。

(2) 無限區間:
$$\begin{aligned}(a, \infty) &= \{x |\ x > a\},\\ [a, \infty) &= \{x |\ x \ge a\},\\ (-\infty, b) &= \{x |\ x < b\},\\ (-\infty, b] &= \{x |\ x \le b\}。\end{aligned}$$

(3) 在以上各區間中, a、b 稱爲邊界點 (boundary points)。在各有限區間中 (a, b) 上的點, 或 無限區間中 (a, ∞) 及 $(-\infty, b)$ 之點, 稱爲內點 (interior points)。

[註] (i) 無限區間 (a,∞) 不可記爲 $(a,\infty]$。 (ii) ∞ 不是 (a,∞) 的邊界點。

例 1.1.8. 求:

(1) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(0,\frac{1}{n}\right]$,

(2) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left[0,\frac{1}{n}\right)$,

(3) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[-n,n]$,

(4) $\bigcup\limits_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right]$ 。

<u>不等式</u>

性質 1.1.9. 令 $a,b,c\in\mathbb{R}$。

(1) 若 $a<b$, 則 $a+c<b+c$。

(2) 若 $a<b,c<d$, 則 $a+c<b+d$。

(3) 若 $a<b,c>0$, 則 $ac<bc$。

(4) 若 $a<b,c<0$, 則 $ac>bc$。

(5) 若 $0<a<b$, 則 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$。

例 1.1.10. 解以下各不等式:

(1) $2x-3<x+4\le 3x-2$,

(2) $x^3>x$,

(3) $(2-x)(1-x)^2x^3\le 0$,

(4) $-2<\dfrac{2x-3}{x+1}\le 1$。

<u>絕對值</u>

定義 1.1.11. 實數 a 的絕對值 (absolute value) $|a|$, 定義爲 $|a|=a$ 若 $a\ge 0$; $|a|=-a$ 若 $a<0$。

性質 1.1.12. 若 $a>0$, 則

(1) $|x|=a$ 若且唯若 (if and only if) $x=\pm a$;

(2) $|x|<a$ 若且唯若 $-a<x<a$;

(3) $|x|>a$ 若且唯若 $x>a$ 或 $x<a$。

性質 1.1.13. $a,b\in\mathbb{R}$, 則

(1) $\sqrt{a^2} = |a|$,

(2) $|ab| = |a||b|$,

(3) $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$,

(4) $|a+b| \leq |a| + |b|$,

(5) $|a| - |b| \leq |a-b|$。

例 1.1.14. 解下列絕對值方程式或不等式:

(1) $|\frac{2x-1}{x+1}| = 3$,

(2) $|5-2x| < 3$,

(3) $|x-1| - |x-10| \geq 5$。

平面幾何

定義 1.1.15. 平面上取兩互相垂直的座標線, 一爲鉛垂線, 一爲水平線相交於 O。水平線正向爲右, 稱爲 x-軸; 鉛垂線正向爲上, 稱爲 y-軸。平面上任一點 P 對 x, y-軸的垂足之座標分別爲 a 及 b, 則 (a, b) 爲 P 的座標, 如此得到直角座標系 (rectangular coordinate system) 。

例 1.1.16. 作以下集合的圖形:

(1) $\{(x,y)| -3 \leq y < 1\}$,

(2) $\{(x,y)||x| < 4$ 且 $|y| < 2\}$,

(3) $\{(x,y)|y \geq x^2 - 1\}$,

(4) $\{(x,y)| -x \leq y < \frac{1}{2}(x+3)\}$,

(5) $\{(x,y)|x + |x| = y + |y|\}$,

(6) $\{(x,y)||x-y| + |x| - |y| \leq 2\}$。

性質 1.1.17. (1) 平面上兩點 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ 之距離爲 $\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$ 。

(2) 一非鉛直之直線通過兩點 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, 則其斜率爲 $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$。

(3) 直線之方程式有如下之表法:

  (a) 點斜式 $y - y_1 = m(x - x_1)$,
  (b) 斜截式 $y = mx + b$,
  (c) 兩點式 $(x_2 - x_1)(y - y_1) = (x - x_1)(y_2 - y_1)$,
  (d) 截距式 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 。

(4) (a) 兩非鉛垂線平行的充要條件是它們的斜率相等;
  (b) 兩非鉛垂線互相垂直的充要條件是它們的斜率互爲負倒數 。

例 1.1.18. 考慮以 $A(6, -7), B(11, -3), C(2, -2)$ 爲頂點之三角形。

(1) 以距離證明它是直角三角形，

(2) 以斜率證明它是直角三角形，

(3) 求其面積。

註 1.1.19. 一些二次方程式的圖形如下:

(1) $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ 爲圓方程式,

(2) $y=ax^2+bx+c$ 或 $x=ay^2+by+c$ 爲拋物線方程式,

(3) $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ 爲橢圓方程式,

(4) $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ 或 $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ 爲雙曲線方程式。

例 1.1.20. 作圖 $x^4-4x^2-x^2y^2+4y^2=0$。

1.2 函數 (Functions)

函數的呈現方式

1.2.1. 一函數可能以下列方式呈現:

(1) 以文字方式描述。例: (i) 圓面積與半徑的平方成正比; (ii) 小於或等於 x 的質數個數。

(2) 以數值方式描述。例: 人口數圖表。

(3) 以圖形方式描述。例: 地震圖。

(4) 以數學式描述。

例 1.2.2. 一個立方體無蓋的盒子體積爲 10 立方公尺, 底部的長是寬的兩倍。底的材料成本是每平方公尺 10 元; 側面的材料 成本是 每平方公尺 6 元。將盒子的總成本以底部之寬度的函數表出。

例 1.2.3. 面積爲25的直角三角形, 將斜邊長 h 以周長 p 表出。

例 1.2.4. 某地之計程車費率爲起跳75元, 超過兩公里後每 500 公尺 5 元, 將費用對里程的函數寫出。

函數定義

定義 1.2.5. (1) 函數 (function) $f: A \to B$ 是一個對應, 滿足: 對所有 $a \in A$, 存在惟一 $b \in B$, 使得 f 將 a 對應到 b。即 $\forall a \in A, \exists!\, b \in B$ 使得 $f(a)=b$。

(2) A 稱爲 f 的定義域 (domain); B 稱爲 f 的對應域 (codomain); $f(A)=\{f(a)|a \in A\} \subset B$ 稱爲 f 的值域 (range)。
[註] f 可視爲從 A 到 $f(A)$ 的函數。

定義域與值域

註 1.2.6. 若 $f(x)$ 是個以數學式定義的實值函數, 但未指明其定義域, 則其定義域即爲使該數學式有意義之所有 x 值。

例 1.2.7. 如圖。(a) 求 $f(1)$ 及 $f(5)$ 之值; (b) f 之定義域及值域分別爲何?

例 1.2.8. 求以下函數的定義域與值域。

(1) $f(x)=\sqrt{2+x-x^2}$,

(2) $f(x)=\sqrt{x^2-1}+\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$,

(3) $f(x)=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$ 。

<u>一對一與映成</u>

定義 1.2.9. (1) 一個函數 f 若滿足: “$x_1\neq x_2$ 則 $f(x_1)\neq f(x_2)$”, 則 f 稱爲一對一 (one-to-one) 函數。
(2) 若 f 之值域等於對應域, f 稱爲映成 (onto) 函數。

例 1.2.10. 證明 $y=x^3$ 爲一對一函數。

例 1.2.11. 令 $\mathbb{Z}_+=\mathbb{N}\cup\{0\}$。$f$ 爲從 $\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}_+$ 對應到 $\mathbb{Z}_+$ 的函數, 定義爲

$$f(m,n)=\frac{(m+n)(m+n+1)}{2}+m。$$

試證: f 是一對一且映成的函數。

1.3 函數運算

1.3.1. (1) 四則運算:

(i) $(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x)$, $\quad \mathrm{Dom}(f\pm g)=\mathrm{Dom}\,f\cap\mathrm{Dom}\,g$。

(ii) $(f\cdot g)(x)=f(x)g(x)$, $\quad \mathrm{Dom}(f\cdot g)=\mathrm{Dom}\,f\cap\mathrm{Dom}\,g$。

(iii) $(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$, $\quad \mathrm{Dom}\,\frac{f}{g}=\mathrm{Dom}\,f\cap\mathrm{Dom}\,g\cap\{x|g(x)\neq 0\}$。

(2) 合成運算:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x)),\quad \mathrm{Dom}(f\circ g)(x)=\{x\in\mathrm{Dom}(g)|g(x)\in\mathrm{Dom}\,f\}.$$

例 1.3.2. 設 $f(x)=x, g(x)=\frac{1}{x}$, 且 $h(x)=(f\cdot g)(x)=x\cdot\frac{1}{x}=1$, 則函數 h 的定義域 $\mathrm{Dom}\,h$ 應爲 $\mathbb{R}-\{0\}$, 而非 $\mathbb{R}$。

例 1.3.3. 求函數 $f(x)=\frac{x+1}{1+\frac{1}{x+1}}$ 之定義域。

例 1.3.4. 令 $F(x)=\cos^2(x+9)$。求函數 f,g,h 使得 $F=f\circ g\circ h$。

例 1.3.5. 令 $f(x)=\sqrt{x}, g(x)=\sqrt{2-x}$, 求 $f\circ g$, $g\circ f$, $f\circ f$, $g\circ g$ 及它們的定義域。

例 1.3.6. 若 $f_0(x)=\frac{x}{x+1}$ 且 $f_{n+1}=f_0\circ f_n, n=0,1,2,\ldots$, 求 $f_n(x)$ 的公式。

例 1.3.7. (1) 若 $g(x)=2x+1$ 且 $h(x)=4x^2+4x+7$, 求一函數 $f(x)$ 使得 $f\circ g=h$。

(2) 若 $g(x)=2x+1$ 且 $h(x)=4x^2+4x+7$, 求一函數 $f(x)$ 使得 $g\circ f=h$。

1.4 函數圖形

函數圖形

定義 1.4.1. 若 $A, B \subset \mathbb{R}$, 則 $f : A \to B$ 稱爲實數值函數 (real valued function), 集合 $\{(x, f(x)) : x \in A\}$ 稱爲 f 的圖形 (graph)。

註 1.4.2. (1) 垂直線判別法: 一個圖形是函數圖形的充要條件爲任一垂直線與其至多交於一點。

(2) 一個函數是一對一的充要條件爲其圖形與每一水平線至多交於一點。

函數圖形的變動

1.4.3. (1) 鉛直方向平移: $y = f(x) + k$。

(2) 水平方向平移: $y = f(x + h)$。

(3) 鉛直方向伸縮: $y = cf(x)$。

(4) 水平方向伸縮: $y = f(cx)$。

(5) $y = -f(x)$ 是 $y = f(x)$ 對x-軸的鏡射。

(6) $y = f(-x)$ 是 $y = f(x)$ 對y-軸的鏡射。

例 1.4.4. 由 $y = \sqrt{x}$ 之圖形作以下各函數之圖形: $y = \sqrt{x} - 2$, $y = \sqrt{x - 2}$, $y = -\sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $y = \sqrt{2x}$, $y = \sqrt{-x}$。

例 1.4.5. 作以下函數的圖形:

(1) $f(x) = x^2 + 6x + 10$,

(2) $y = 1 - \sin 2x$,

(3) $f(x) = \frac{1}{1-x}$,

(4) $f(x) = |x^2 - 1|$。

例 1.4.6. (1) 對不同的 c 作 $f(x) = x^3 + cx$ 之圖形。

(2) 討論 $f(x) = \sin 50x$ 之圖形。

(3) 討論 $f(x) = \sin x + \frac{1}{100} \cos 100x$ 之圖形。

例 1.4.7. 以函數圖形求方程式 $\cos x = x$ 的解。

1.5 常見之函數類型

分段定義的函數

例 1.5.1. (1) $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0, \\ -x & x < 0。\end{cases}$

(2) $f(x) = \begin{cases} -x & x < 0, \\ x^2 & 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & x > 1。\end{cases}$

(3) 最大整數函數, 高斯函數, 地板函數 (greatest integer function, Gauss function, floor function)
$\lfloor x \rfloor = n$, 若 $n \leq x < n+1, n \in \mathbb{Z}$。$\lfloor x \rfloor$ 即小於或等於 x 的最大 整數。

(4) 天花板函數 (ceiling function)
$\lceil x \rceil = n+1$, 若 $n < x \leq n+1, n \in \mathbb{Z}$。$\lceil x \rceil$ 即大於或等於 x 的最小整數。

(5) 將圖中的函數以數學式寫出。

例 1.5.2. 如何以 $\lfloor x \rfloor$ 表出 $\lceil x \rceil$？

例 1.5.3. 以 $\max\{a, b, \dots\}$ 表示 $a, b, \dots$ 中之較大者。

(1) 作函數 $f(x) = \max\{x^2, 2+x, 2-x\}$ 之圖形，

(2) 描繪出不等式 $-1 \leq \max\{x, 2y^2\} \leq 1$ 所定義的區域，

(3) 以一個涉有絕對值之數學式表出函數 $f(x) = \max\{g(x), h(x)\}$。

例 1.5.4. (1) 一個數列 (sequence) $\{a_n\}$ 可視爲定義在 $\mathbb{N}$ 上的函數, 即 $f(n) = a_n$。

(2) 數列亦可用遞迴公式 (recursive formula) 來定義。例如

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1, \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \geq 3, \end{cases}$$

此數列稱爲 Fibonacci 數列。事實上, 可證明

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

基本函數

1.5.5. (1) 線性函數 (linear function): $f(x) = mx + b$。

(2) 冪次函數 (power function): $f(x) = x^n$。

(i) $n \in \mathbb{N}$。

(ii) $-n \in \mathbb{N}$。

(iii) $n = \frac{1}{m} \in \mathbb{Q}$。

(iv) $n \in \mathbb{R}$。

(3) 多項式函數 (polynomial function): $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$。若 $a_n \neq 0$, 則 $P(x)$ 的次數 (degree) 爲 n。
若 $n = 2$, 則稱爲二次函數 (quadratic function); 若 $n = 3$, 則稱爲三次函數 (cubic function)。

(4) 有理函數 (rational function): $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, 其中 $P(x), Q(x)$ 爲多項式。

(5) 代數函數 (algebraic function): 將多項式函數反覆作有限次四則及開方運算而得。

(6) 三角函數 (trigonometric function)。

(7) 反三角函數 (inverse trigonometric function)。

(8) 指數函數 (exponential function): $f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$。注意, 比較指數函數與冪次函數之分別。

(9) 對數函數 (logarithmic function): $f(x) = \log_a x, a > 0, a \neq 1$。

(10) 超越函數 (transcendental function): 非代數函數。

(11) 基本函數 (elementary function): 將有理函數, 冪次函數, 三角函數, 反三角函數, 指數函數, 對數函數反覆作有限次四則、合成及開方運算而得。

[註] 我們將在本章後四節簡要地介紹這些函數。

1.6 函數特性

奇偶性

定義 1.6.1. (1) 若 $\forall x \in \operatorname{Dom} f$, $f(-x) = f(x)$, 則 $f(x)$ 稱爲偶函數 (even function);

(2) 若 $\forall x \in \operatorname{Dom} f$, $f(-x) = -f(x)$, 則 $f(x)$ 稱爲奇函數 (odd function)。

註 1.6.2. (1) 奇函數之圖形對原點對稱; 偶函數之圖形對 $y-$軸對稱。

(2) 任一 定義在實數上的函數必可寫成一個奇函數和一個偶函數的和, 且其表法是惟一的。

例 1.6.3. (1) 若 $g(x)$ 爲奇函數, 則對 $g(0)$ 可下什麼結論?

(2) 若 $g(x)$ 爲偶函數, 則對 $g(0)$ 可下什麼結論?

例 1.6.4. 判斷下列函數的奇偶性:

(1) $f(x) = 4x^5 - 3x^2$,

(2) $f(x) = \frac{x^2}{1+x^4}$,

(3) $f(x) = \sqrt[3]{x^5 - 4x^3}$,

(4) $f(x) = x|x|$,

(5) $f(x)=\lfloor x\rfloor$ 。

例 1.6.5. 作圖 $y=|x^2-4|x|+3|$。

例 1.6.6. 令 $f(x),g(x)$ 爲定義在 $\mathbb{R}$ 上的函數。試分別就 $f(x),g(x)$ 的奇偶性, 討論 $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $f(x)/g(x)$ 及 $f(g(x))$ 的奇偶性 。

昇降性

定義 1.6.7. (1) 若 $\forall x,y\in I, x<y$, 則 $f(x)<f(y)$, 我們稱 $f(x)$ 在 I 上爲遞增 (或上昇 increasing);

(2) 若 $\forall x,y\in \mathrm{Dom}\, f, x<y$, 則 $f(x)>f(y)$, 我們稱 $f(x)$ 在 I 上爲遞減 (或下降 decreasing)。

例 1.6.8. 令 $f(x),g(x)$ 爲定義在 $\mathbb{R}$ 上的函數。試分別就 $f(x),g(x)$ 的昇降性, 討論 $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $f(x)/g(x)$ 及 $f(g(x))$ 的昇降性 。

1.7 反函數 (Inverse Functions)

定義 1.7.1. 若 f 爲一對一函數, 其定義域爲 D, 值域爲 R, 則其反函數 (inverse function) $f^{-1}:R\to D$ 定義爲 $f^{-1}(b)=a\Leftrightarrow f(a)=b$, 其中 $a\in D$ 且 $b\in R$。

註 1.7.2. (1) $f^{-1}(y)=x\Leftrightarrow f(x)=y$。

(2) f^{-1} 的定義域=f 的值域; f^{-1} 的值域=f 的定義域。

(3) $f^{-1}(x)\neq \frac{1}{f(x)}=(f(x))^{-1}$。

(4) $(f^{-1}\circ f)(x)=x, \forall x\in \mathrm{Dom}\, f$。

(5) $(f\circ f^{-1})(y)=y, \forall y\in \mathrm{Dom}\, f^{-1}=\mathrm{Range} f$。

(6) 若 f 爲 D 上的嚴格上昇 (下降) 函數, 則 $f(x)$ 爲一對一且有反函數。

(7) $y=f(x)$ 與 $y=f^{-1}(x)$ 之圖形對 $x=y$ 直線對稱。

例 1.7.3. $g(x)=\sin x$:

(i) 定義在 $[0,\pi]$ 上時, 不是一對一;

(ii) 定義在 $[-\pi/2,\pi/2]$ 上時爲嚴格遞增, 所以是一對一。故可定義反函數 $\sin^{-1}:[-1,1]\to[-\pi/2,\pi/2]$。

[註] 詳見本章最後一節。

例 1.7.4. (1) 求 $f(x)=x^3+2$ 之反函數。

(2) 求 $y=x^2$, $x\geq 0$ 之反函數。$x\leq 0$ 呢?

例 1.7.5. 作 $f(x)=\sqrt{-1-x}$ 及其反函數的圖形。

1.8 指數函數 (exponential functions)

例 1.8.1. 在2000年, 將 100元存入銀行, 以 5.5% 的年利率複利計算, 則在 r 年後本利和若干?

註 1.8.2. (1) 現考慮形如 $f(x) = a^x$ 之函數。就不同的 x 值而言, 其意義如下:

$$\begin{aligned}
&x = n,\ n \in \mathbb{N} && \Rightarrow \quad a^n = a \times \cdots \times a. \\
& && a^0 = 1 \\
&x = -n && \Rightarrow \quad a^{-n} = (\tfrac{1}{a})^n. \\
&x = \tfrac{1}{n} && \Rightarrow \quad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}. \\
&x = q/p,\ (p,q) = 1, p, q \in \mathbb{Z} && \Rightarrow \quad a^{q/p} = (\sqrt[p]{a})^q.
\end{aligned}$$

(2) 若 $a > 0, x = r$ 爲無理數, 則先取 x 爲有理數, 當 x 越來越接近 r 時, a^x 會越來越接近某定值, 此值即定義爲 a^r。
(3) 綜合上述, 可得到以 a 爲底的指數函數 (exponential function) $f(x) = a^x$。此定義使得 $f(x)$ 的圖形沒有“孔”或“ 跳躍”, 即爲連續函數。

例 1.8.3. 定義無理指數 $2^{\sqrt{2}}$: 令 a_n 爲 $\sqrt{2}$ 的小數點後第 n 位數字, 即 $\sqrt{2} = 1.a_1a_2a_3a_4\cdots$, 則可以定義

$$2^{\sqrt{2}} = \lim_{n\to\infty} 2^{1.a_1a_2\cdots a_n},$$

其中 $1.a_1a_2\cdots a_n$ 均爲有理數。

性質 1.8.4. 若 $a, b > 0, x, y \in \mathbb{R}$, 則

(1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$,

(2) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$,

(3) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$,

(4) $(a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x$,

(5) $a^x \cdot b^x = (ab)^x$,

(6) $\frac{a^x}{b^x} = (\frac{a}{b})^x$。

註 1.8.5. (1) 自然指數函數爲 $y = e^x$。其中 e 是一特定數值, 使指數函數 $y = e^x$ 與 y-軸相交處的斜率爲 1。

(2) 此數值 e 大約爲 $2.718281828\cdots$。

(3) 又當 x 很大時, $(1 + \frac{1}{x})^x$ 很接近 e。

(4) e^x 亦可記爲 $\exp(x)$。

例 1.8.6. 解方程式或不等式:

(1) $e^{ax} = Ce^{bx},\ a \neq b$,

(2) $1 \leq 3^{4x-1} \leq 2$。

註 1.8.7. (1) $y = e^{kx}(k \neq 0)$ 通常作爲指數成長或衰變的模型。
當 $k > 0$, $y = y_0 e^{kx}$ 稱爲指數成長;
當 $k < 0$, $y = y_0 e^{kx}$ 稱爲指數衰變。

(2) 連續複利: 設本金爲 A, 年利率爲 r。若計息的時間間隔很短, 即 $A(1+\frac{r}{n})^{nx}$ 中的 n 很大的時候, 則在 x 年後, 本利和會接近 Ae^{rx}。因此, 連續複利爲一種指數成長。

例 1.8.8. 投資公司通常以連續複利計算投資的成長, 在 2010 年投資 100 元, 年利率 5.5%, 估計 2014 年的資金總額。

例 1.8.9. C^{14} 的衰變常數爲 $1.2 \cdot 10^{-4}$。若原本 C^{14} 的量爲 A, 預測在 866 年後, 衰變所餘的量爲何?

1.9 對數函數 (Logarithm Functions)

定義 1.9.1. 以 a 爲底的對數函數 (Logarithm Function) 定義爲 $y = a^x$ 的反函數 ($a \neq 1$, $a > 0$), 記爲 $\log_a x$。

註 1.9.2. (1) $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$ 。

(2) $\log_a(a^x) = x, x \in \mathbb{R}$。

(3) $a^{\log_a x} = x, x > 0$ 。

(4) $\log_2 x$ 在計算科學上常用。

(5) $\log_e x$ 常記爲 $\ln x$, 稱爲自然對數。

(6) $\log_{10} x$ 常記爲 $\log x$, 稱爲常用對數。

性質 1.9.3. 對 $b > 0, x > 0, a > 0, a \neq 1$, 對數函數滿足:

(1) $\log_a bx = \log_a b + \log_a x$。

(2) $\log_a \frac{b}{x} = \log_a b - \log_a x$。

(3) $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$。

(4) $\log_a x^r = r \log_a x$。

(5) $\ln e = 1$。

(6) $a^x = e^{x \ln a}$。

(7) $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$。

例 1.9.4. 解方程式或不等式:

(1) $\ln(x^2 - 2x - 2) \leq 0$,

(2) $3^{\log_3 7} - 4^{\log_4 2} = 5^{(\log_5 x - \log_5 x^2)}$。

例 1.9.5. 作圖 $y = \ln(x-2) - 1$。

例 1.9.6. Sarah 拿 1000 元投資, 年利率 5.5%, 以連續複利計息, 則何時可達到 2500 元?

例 1.9.7. 釙210的衰變常數爲 5×10^{-3}, 求半生期 (half life)。

例 1.9.8. 證明 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ 是奇函數, 並求其反函數。

1.10 三角函數(Trigonometric Functions)

定義 1.10.1. (三角函數 Trigonometric Functions)

(1) 銳角 (acute angles):

$$\sin\theta = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}, \quad \cos\theta = \frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}, \quad \tan\theta = \frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}},$$
$$\cot\theta = \frac{\text{鄰邊}}{\text{對邊}}, \quad \sec\theta = \frac{\text{斜邊}}{\text{鄰邊}}, \quad \csc\theta = \frac{\text{斜邊}}{\text{對邊}}\text{。}$$

(2) 一般角 (general angles):

$$\sin\theta = y, \quad \cos\theta = x, \quad \tan\theta = \frac{y}{x},$$
$$\cot\theta = \frac{x}{y}, \quad \sec\theta = \frac{1}{x}, \quad \csc\theta = \frac{1}{y}\text{。}$$

性質 1.10.2. (1) 特別角函數值:

	sin	cos	tan	cot	sec	csc
$0°$	0	1	0	x	1	x
$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
$45°$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
$90°$	1	0	x	0	x	1

(2) 函數正負:

(3) 定義域與值域:

$$\begin{array}{llll} \sin : \mathbb{R} \to [-1,1], & & \cos : \mathbb{R} \to [-1,1], \\ \tan : \mathbb{R} - \left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\} \to \mathbb{R}, & & \cot : \mathbb{R} - \{n\pi\} \to \mathbb{R}, \\ \sec : \mathbb{R} - \left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\} \to \mathbb{R} - (-1,1), & & \csc : \mathbb{R} - \{n\pi\} \to \mathbb{R} - (-1,1)\text{。} \end{array}$$

(4) 圖形:

(5) 週期:

$$\sin, \cos, \sec, \csc : \text{最小週期 } 2\pi; \quad \tan, \cot : \text{最小週期 } \pi\text{。}$$

(6) 奇偶性:

$$\sin, \tan, \cot, \csc : \text{奇函數}; \quad \cos, \sec : \text{偶函數。}$$

(7) 換角公式:

$$f(n\pi + \theta) = \pm f(\theta),$$
$$f\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi + \theta\right) = \pm cof(\theta)\text{。}$$

($\pm$ 之決定: 假設 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, 視 f 在 $n\pi + \theta$ 處之正負值而定。)

(8) 倒數公式:

$$\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta}, \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}, \qquad \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}。$$

(9) 平方公式:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1, \qquad \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta, \qquad \cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta。$$

(10) 和角公式 (addition and subtraction formula):

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,\\
\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\alpha,\\
\tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}。
\end{aligned}$$

(11) 倍角公式:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha。$$

(12) 半角公式:

$$\begin{aligned}
&\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},\\
&\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}。
\end{aligned}$$

(正負號視左式的正負值而定。)

(13) 三倍角公式:

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha, \qquad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha。$$

(14) 和差化積:

$$\begin{aligned}
\sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\\
\sin\alpha - \sin\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},\\
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}。
\end{aligned}$$

(15) 積化和差:

$$\begin{aligned}
\sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right],\\
\cos\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\right],\\
\cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right],\\
\sin\alpha\sin\beta &= -\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right]。
\end{aligned}$$

定理 1.10.3. 令 $\angle A, \angle B, \angle C$ 爲一三角形的三個角, a, b, c 分別爲其對應邊之長, 則

(1) 正弦定律 (law of sines):

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}。$$

(2) 餘弦定律 (law of cosines):

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C。$$

(3) 面積公式:

$$\text{三角形面積} = \frac{1}{2}ab\sin C。$$

定理 1.10.4. (n 倍角公式)

(1) $$\sin n\alpha = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \cos^{n-2k-1}\alpha \sin^{2k+1}\alpha$$

$$= \binom{n}{1}\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha + \cdots + \begin{cases} (-1)^{\frac{n-2}{2}}\cos\alpha\sin^{n-1}\alpha & n \text{ 爲偶數} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin^n\alpha & n \text{ 爲奇數} \end{cases}。$$

(2) $$\cos n\alpha = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k} \cos^{n-2k}\alpha \sin^{2k}\alpha$$

$$= \cos^n\alpha - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha + \cdots + \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}\sin^n\alpha & n \text{ 爲偶數} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos\alpha\sin^{n-1}\alpha & n \text{ 爲奇數} \end{cases}。$$

[註] $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$。

例 1.10.5. 證明

(1) $\tan x \sin x + \cos x = \sec x$,

(2) $\sin^2 x - \sin^2 y = \sin(x+y)\sin(x-y)$。

例 1.10.6. (1) 解方程式 $2 + \cos 2x = 3\cos x,\ x \in [0, 2\pi]$,

(2) 解不等式 $\sin x \geq \cos x,\ x \in [0, 2\pi]$ 。

1.11 反三角函數 (Inverse Trigonometric Functions)

定義 1.11.1. 以下函數分別在所限制的定義域上爲一對一 ,

(1) $\sin x : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$,

(2) $\cos x : [0, \pi] \to [-1, 1]$,

(3) $\tan x : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (-\infty, \infty)$,

(4) $\cot x : (0, \pi) \to (-\infty, \infty)$,

(5) $\sec x : [0, \frac{\pi}{2}) \cup [\pi, \frac{3\pi}{2}) \to (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$,

(6) $\csc x : (0, \frac{\pi}{2}] \cup (\pi, \frac{3\pi}{2}] \to (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ 。

因此均有反函數, 分別爲

(1) $\sin^{-1} x : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

(2) $\cos^{-1} x : [-1, 1] \to [0, \pi]$,

(3) $\tan^{-1} x : (-\infty, \infty) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,

(4) $\cot^{-1} x : (-\infty, \infty) \to (0, \pi)$,

(5) $\sec^{-1} x : (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \to [0, \frac{\pi}{2}) \cup [\pi, \frac{3\pi}{2})$,

(6) $\csc^{-1} x : (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \to (0, \frac{\pi}{2}] \cup (\pi, \frac{3\pi}{2}]$ 。

註 1.11.2. (1) $\sin^{-1} x$ 又可寫爲 $\arcsin x$。

(2) $(\sin x)^{-1}$ 表示 $\frac{1}{\sin x}$。

(3) $\sin^n x = (\sin x)^n, n \in \mathbb{N}$;
$\sin x^n = \sin(x^n), n \in \mathbb{Z}$。

(4) $\sin^{-2} x$ 表示什麼意思?

例 1.11.3. 求值：

(1) $\sin^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2})$,

(2) $\cos^{-1}(-\frac{1}{2})$,

(3) $\tan(\arcsin \frac{1}{3})$。

例 1.11.4. 若 $\alpha = \sin^{-1} \frac{2}{3}$, 求 $\cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha, \sec \alpha$ 及 $\csc \alpha$。

性質 1.11.5. (1) $\sin^{-1}(\sin x) = x, \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$; $\cos^{-1}(\cos x) = x, \quad 0 \le x \le \pi$。

(2) $\sin(\sin^{-1} x) = x, \quad -1 \le x \le 1$; $\cos(\cos^{-1} x) = x, \quad -1 \le x \le 1$。

(3) $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$。

(4) $\cos^{-1} x + \cos^{-1}(-x) = \pi$。

例 1.11.6. 化簡

(1) $\cos(\tan^{-1} x)$,

(2) $\sec(2 \tan^{-1} \frac{x}{3})$。

例 1.11.7. 求函數 $f(x) = \left(\sin^{-1}(x^{-1})\right)^{-1}$ 的定義域。

例 1.11.8. 令 $f(x) = \sin\left(\sin^{-1} x\right), g(x) = \sin^{-1}(\sin x)$。

(1) 求 f, g 的定義域。

(2) 化簡 $f(x)$ 及 $g(x)$。

(3) 作 $y = f(x)$ 及 $y = g(x)$ 之圖形。