Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen

Riemann

李文肇 1990 譯於台大數學系

論幾何學之基礎學說

研究大綱

大家知道，幾何學事先設定了空間的概念，並假設了空間中各種建構的基本原則。關於這些概念，只有敍述性的定義，重要的特性則以公設的形態出現。這些假設（諸如空間的概念及其基本性質）彼此間的關係尙屬一片空白；我們看不出這些概念之間是否需要有某種程度的關聯，相關到什麼地步，甚至不知是否能導出任何的相關性。

從歐幾里德（ Euclid ）到幾何學最著名的改革家雷建德（ Legendre ），無論是數學家或研究此問題的哲學家都無法打破這個僵局。這無疑是因爲大家對於「多元延伸量」（包括空間量）的概念仍一無所知。因此我首先要從一般「量」的概念中建立「多元延伸量」的觀念。我將指出，「多元延伸量」是可以容納若干度量關係的。所以我們所處的空間也不過是三元延伸量的一種特例。然而在此必然會發覺，幾何學中的定理並不能由「量」的一般概念中導出，而是要源自經驗和能夠將空間從其他易知的三元量屬性區分出來。因而有了一個問題，即如何找出一組最簡單的數據關係來決定空間的度量關係。這個問題的本質尙有爭議且可能有好幾套簡單的數據關係均符合要求。單就眼前的問題看，最重要的一套是歐幾里得做爲幾何學原本

的公設。一如所有數據關係的定義，它們並沒有邏輯上的必然性。只是由經驗認可，是一個假說。因此，我們能夠做的是研究這類數據關係的可靠性（在我們的觀察範圍內當然相當可靠）。然後考慮是否能夠延伸到觀察範圍之外，亦即朝向測量不能及的大範圍和小範圍來推廣。

1. n 元量的概念

在嘗試解決第一個問題——n 元延伸量概念的建立之前，我懇求大家多批評指教，因爲在這種哲學性質的工作上，觀念比理論建構還難，而我在這方面所受的訓練甚少。過去所學，除了樞密顧問高斯談雙二次剩餘的第二篇論文中的少許提示，他的五十週年紀念册及哥廷根學術雜誌中的點滴及赫巴特（Herbart）的一些哲學研究外，也少能派上用場。

1.

要了解「量」必須先有一個關於「量」的普徧觀念和一些能體現它的特殊的事例。這些事例形成了所謂的流形：任兩事例若可以連續地漸次轉移成爲彼此，是連續流形，否則爲離散流形。個別事例在前者中稱爲「點」，在後者稱爲「元素」。構成離散流形的例子很多，至少在較高等的語言中一定可以找得到——只要能夠理解一堆東西擺在一起的觀念就夠了（在離散量的研究中，數學家可以毫不遲疑地假設所有的「東西」都是同類的）。反過來說，連續流形的例子在日常生活中很少，大概只有顏色以及實

際物體的所有位置可以算是多元量的幾個簡單實例。這種概念的創造與發展最先並屢屢出現於高等數學。

利用標記或圈圍取出流形的某些部分，稱爲「量」。對「量」的定量比較工作，在離散的情形可以用數的，在連續的情況下則需靠測量。測量需將兩個被比較的量疊合；因此必須選出一個量，充當其他量的測量標準。否則，我們只能在一個量包含於另一量時才能做比較只能談「較多」、「較少」，而不知絕對的「大小」。以這種的方式進行，形成了對「量」研究的一個部門。其中「量」的觀念獨立於測距，而相依於位置；不以單位表示，而是必須視爲流形上的區域。這項研究對數學許多部門而言是必要的（例如多變數解析函數的處理），而這種研究的缺乏，正是阿貝爾（ Abel ）的著名定理及拉格郎吉（ Lagrange）、發府（ Pfaff ）和亞各比（ Jacobi ）等人的貢獻之所以未能在微分方程一般理論中有所發揮的主要原因。從「延伸量」的科學的這個部門出發，不需借助任何其他的假設，我們首需強調兩點，以澄清「 n 元延伸量」的基本性質。第一點是關於「多元延伸量」這種概念的建立，而第二點則提到如何將流形中定位置的問題轉化爲決定數值的問題。

2.

在一個概念下的事例如果構成連續流形，則從其中的一個事例以確定的方式移動到另一個事例時，中間所經過的所有事例會構成一個一元延伸的流形。它的特色是，從

其中任一點出發，則只有兩個方向可供連續移動：亦即非往前則往後。現在，我們想像這個一元流形以確定的方式移向另一個完全不同的一元流形，以致於舊流形上每一點都確定的走向新流形上的對應點，則仿前述，這樣的例子便構成了一個二元延伸流形。以此類推，我們可以想像一個二元延伸流形確定地移向一個完全不同的二元流形而得到一個三元延伸流形，不難看出如何繼續這個建構。如果我們把這個過程中的參與者看成是變動的，而非固定的概念，則這種建構可以看成是融合 n 維和一維的變動度而得到 n+1 維的變動度。

反之，我現在要說明怎樣將一個具已知邊界的變動度分解為一個一維變動度及一個較低維的變動度。考慮流形上沿一個一維向度的分解，固定其中之一，使其分解上的點得以相互比較。沿這個向度上的每一點都給定一個值，值隨著點的不同而連續變化。換句話說，我們可以在這個給定的流形上定出一個連續的位置函數，使在流形上的任一區函數的值絕非常數。則當此函數的值固定時，共享此值的所有原流形上的點，便形成了一個較低維的連續流形。函數值改變時，這些流形便分解而連續地從一個變為另一個；我們因而可以假定它們全部都是同一個子流形的變換，而這種變換會使得第一個子流形上的每一點規律地對應到第二個子流形上的每一點。也有些例外的情形，它們相當重要，在此略過。這樣，流形上點的位置，便可化簡為一個數字以及一個較低維的子流形上的點的位置。我們

不難發現，原流形若是n維，則分解後所得到的子流形必有n−1維，這個過程重覆n次以後，一個n元流形上的位置關係便可化為n個數字；任一個流形若可依此法予以化簡，則化簡的結果必然是有限個數字。不過也有些較特殊的流形，其位置最後化簡的結果是無窮列或連續體。這流形的例子有：某一區域上的所有函數、一個實體的所有形狀等等。

Ⅱ．能適用於n元量的度量關係

（假設綫的長度獨立於其形狀，每一條綫都可以拿另一條綫來量度）

在建立了n元流形的觀念，並將其中位置決定問題轉化成為數值決定問題的基本性質確立之後，我們接著要討論第二個問題，亦即研究能適用於流形的度量關係，及決定這些關係的條件。這些度量關係只能以抽象方式表示，而它們之間的關連只能藉公式表達。然而在某些假設之下，我們可以把它們化成能獨立地以幾何方式表現的關係，也因而可以將數量運算的結果以幾何表示。因此，雖然無法完全避免抽象公式化的研究，但其結果可用幾何方式表出。這兩個部分的基礎見於樞密顧問高斯談曲面的著名論文中。

1.

測量，需要先讓量獨立於位置而存在；有很多方法可以辦到這一點。這正是我在此所要提出的假說，亦即綫的長度與其形狀無關，每條綫都能以另一條綫測距。位置化簡為數量，則n元流形中的點的位置可用 x_1、x_2、x_3 直到 x_n等n個變量表示；如此，則只要X（$X=x_1, x_2 \cdots x_n$）能表為參數t的函數，便能定出直綫。所以我們的主題是，為綫的長度定出一個數學式；為此，所有的X要有共同的單位。我要在某些特定條件的限制下處理這個問題。

首先我要規定我所討論的綫，其 dx_i（x_i 的微變化量）間的比值呈連續變化。如此，我們可以把綫分割成許多小段的「線元素」，使得「線元素」上 d_x（即 dx_1、dx_2、dx_3……dx_n 間）的比爲定值，我們的問題則是，如何爲每一點找出一個 ds 的一般式，其中 ds 必須以 x 和 dx 表示。再則，我要假設，當「線元素」上每一點都產生相同的微量移動時，「線元素」的長度 ds 一階不變；也就是說，如果所有的 dx 都以同一比例放大，則「線元素」亦以該比例放大。在這些假設之下，「線元素」可以是 dx_i 的一個一次齊次函數，其中 dx_i 全變號時「線元素」不變，且一次齊次式的係數都是 x 的函數。舉一個最簡單的例子：先找一個式子來代表與這個「線元數」的起點等距的所有點所形成的 n-1 維流形；亦即找到一個位置的連續函數，使得上述各等距 n-1 維流形代入之值都不同。則向各個方向遠離起點時，函數的值必須越來越大，或越來越小。我要假設在其往各方向遠離起點時，函數值越來越大，而在起點產生最小值。因此函數的一次與二次微分係數如爲有限，則一次項係數須爲零，而二次項係數爲非負；在此假設二次項係數恆正。當 ds 固定時，這個二次微分式亦固定；當 ds 以同一比例放大時（ds 亦然），它以平方的關係放大。因此，它等於 ds^2 乘以一個常數，而 ds 也因而等於一個以 x 的連續函數爲係數的 dx 的正二次齊次式的方根。在物理空間中，如用直角座標，則 $ds=\sqrt{\sum(dx)^2}$；物理空間是我們這個「最簡單的例子」中的特例。下一個次簡單的例

子應該算是以四次微分式的四次方根來表示綫元的流形了。研究這種更一般的情形並不需要新的原理，然而非常費事，且對物理空間的研究幫助不多，特別是因爲其結果無法以幾何形式呈現。我因此只打算研究「線元素」能表爲二次微分式方根的這種流形。若以 n 個新的獨立變數的 n 個函數，代替原有的 n 個變數，則可將原來的式子轉換成一個類似的式子。然而我們並不能這樣任意地用此法把一式變成另一式，因爲這樣的式子有 $n\frac{n+1}{2}$ 個係數是獨立變數的任意函數。引進新變數時只能滿足 n 個條件，因此只能將 n 個係數的值求出。還剩下 $n\frac{n-1}{2}$ 個係數，完全取決於所代表的流形，而需要 $n\frac{n-1}{2}$ 個位置函數來定出它的度量關係。因此，像平面和物理空間這樣子，綫元素可寫成 $\sqrt{\sum dx^2}$ 的流形，構成了一種特殊情形，是我們正要探討的。他們需要一個名稱；因此我想把這種綫元素平方能以全微分平方和之式子表示的流形叫做「平」的流形。爲了分析上述流形的主要差別，必須除去依賴於表現方式的那些特性。爲了達到這一點，我們要依據一定的原理來選擇變量。

2

基於以上目的，我們要建立一個自一原點出發的測地線或最短曲線系統。如此，任意點可經由兩個條件而確定其位置：連接該點與原點的最短曲線的長度，以及此線在原點的初始方向。也就是說，找出 dx^0（起始點上沿最短

曲線的 dx）的比值，及此線的長度 s，就可得所求點的位置了。我們現在引進一組綫性表式 $d\alpha$ 來代替 dx^0，使得在原點綫元素的平方等於這些 $d\alpha_i$ 的平方和，因此獨立變數變成了 s，以及諸 $d\alpha$ 的比。最後，找 $x_1, x_2, x_3 \cdots\cdots x_n$ 使其與 $d\alpha_i$ 成正比，且平方和等於 s^2。引入這個量之後，對於微量的 x，線元素的平方會等於 $\sum dx^2$。但它的展式中的下一級則是一個有 $n\frac{n-1}{2}$ 項的二次齊次式：$(x_1dx_2 - x_2dx_1)$，$(x_1dx_3 - x_3dx_1)$，……，形成了一個四次的微量；我們若將它除以 $(0, 0, 0 \cdots\cdots)$，$(x_1, x_2, x_3 \cdots\cdots)$，$(dx_1, dx_2, dx_3 \cdots\cdots)$ 三點爲頂點的三角形的平方，將得到一個有限值。此值在 x 和 dx 同屬一個二元綫性式時，或當由原點到 x 及由原點到 dx 這兩條綫屬同一面元素時，是不會變的，因此視面元素的位置和方向而定。很顯然，若我們的流形是「平」的，它會等於 0；此時綫元素的平方可以化爲 $\sum dx^2$；因而可以將該值視爲在此面元素的方向上與「平」之偏差的一個指標。將它乘以 $-\frac{3}{4}$，則變成了樞密顧問高斯所稱的面曲率。先前提過，需要有 $n\frac{n-1}{2}$ 個位置函數才能確定上述 n 元流形的度量關係。因此，每點若給定 $n\frac{n-1}{2}$ 個面方向的曲率，便可定出流形的度量關係；但有個條件：這些曲率值之間不能有恆等式的關係，而確實如此，一般不會發生這種情形。這樣一來，這種能以微分平方式的方根表線元素的這種流形，其度量關係因此以完全獨立於變量的選擇表示。我們也可以用同樣的方法處理一種線元素表現得稍複雜的情形——線元素表成微分的四次式的四次方根。在

這種更一般的情形下，綫元素無法化成微分式的平方和的根號，因此線元素平方與「平」的偏差度將會是二維的微量，而非如其他流形是四維微量。這種特性，不妨叫做最小部份的平面性。然而就目前而言，這些流形最主要的特性，也是我們之所以要加以研究的原因，是二維流形的度量關係可以用幾何上的「曲面」來代表，而多元流形的度量關係可以化為自身所包含的「曲面」。我們將再做討論。

3.

在曲面的了解上，內在的度量關係，雖然只和曲面上路徑的長度相關，卻往往和曲面與其外部點之相對位置扯上關係。然而我們可以自外在關係中把曲面抽出，方法是用一種不改變面上曲線長度的彎曲；亦即曲面只能加以彎曲，而不能伸縮，因彎曲而產生的各種曲面都視為相同。因此，任何的圓柱面和圓錐面和平面是相同的，因為只要將平面彎曲便可形成錐和柱，而內在度量關係不變，所有關於平面的定理——整個平面幾何學，都仍然有效。反過來說，球和上述的三種面則根本上不同，因為由球面變成平面勢必要伸縮。根據前面的研究，二元量的綫元若能表為微分平方式的方根，如曲面，則其每一點的內在度量關係決定於曲率。就曲面而言，這個量可以想像成曲面在這點的兩個曲率的積；或者由另一角度看：這個量乘以一個由測地綫形成的無限小三角形（隨著其直徑的縮小），會等

於內角和減去兩直角，（用逕度量表示即內角和減 π ）的一半。第一個定義預設了兩個曲率積在曲面彎曲下不變的定理。第二個定義則假定一個無限小三角形，其內角和減去兩直角會正比於面積。為了在 n 元流形中給定點的一個面方向上，替曲率下一個可以理解的定義，我們先提過，發自一點的最短曲線決定於其初始方向。同理，如果將所有起自一點而處在面元上的向量延長成最短曲線，則可定出曲面；而這曲面在這定點上有一定的面曲率，此面曲率等於此點的 n 元流形沿曲面方向的曲率。

4.

把這些結果應用到空間幾何上之前，我們還需要對「平」的流形（亦即，綫元素平方可以表為全微分的平方和的流形）做一些通盤的考慮。

在一個「平」的 n 元流形上，每一點，每一方向的曲率皆為 0 ；然根據前面的研究，如果要決定其度量關係，必須知道每一點上有 $n\frac{n-1}{2}$ 個獨立曲面方向，其曲率為 0。曲率處處為 0 的流形，可以看成是曲處處為定值的流形的一種特例。曲率為定數的流形，其共同特徵如下：其上的圖形可移動而不必伸縮。很顯然，每一點為每一方向的曲率如果不全相同，圖形便無法自由地平移、旋轉。反過來說，流形度量的性質完全由曲率決定；因此在任一點的每個方向上的值與在另一點每個方向上的值完全相同，因此可以從任何一點開始。所以在曲率固定的流形上，圖形可

以擺在任何位置。這些流形的度量關係僅決定於曲率之値；順便由解析的觀點看，此値若記爲 a ，則綫元素可表爲

$$\frac{1}{1+\frac{a}{4}\sum x^2}\sqrt{\sum dx^2}$$ 。

5.

常曲率的曲面可用來做幾何的例證。我們不難看出，常曲率爲正的曲面，必可滾貼到半徑爲該曲率倒數的球上。爲了了解這種曲面的各種變化，我們取一個球，以及在赤道與球相切的旋轉面。

常曲率比球大的這類曲面，會從球的內部與赤道相切，類似輪胎面的外側；它們也可以滾貼上半徑較小的球帶，但可能不止一層。曲率比球小，而仍爲正的曲面，可由下面的方法得到：用兩個大半圓切割較大半徑的球面，再把切割綫貼合起來。曲率爲 0 的曲面，是一個在赤道與球相切的圓柱；若曲率爲負，則類似輪胎面的內側，在赤道與球外切。如果把這些曲面看成面塊在其中移動的所有可能位置，正如空間是物體的位置一般，則小面塊可在曲面上自由移動而不必伸縮。曲率爲正的曲面可以讓面塊自由移動而不必彎曲，如球面，但曲率爲負者就不行了。除了這種小面塊對位置的獨立性之外，在曲率爲 0 的曲面中，有一種其他曲面沒有的特性，即方向獨立於位置。

Ⅲ　物理空間中的應用

1.

研究了n元量的度量關係的決定方式之後，我們可以給出決定物理空間的度量關係的充要條件；但大前提是，先假設綫長是獨立於其形狀，且綫元素可表成微分平方式的方根——因此極微小的狀態可視爲「平」的。

首先，這些條件可以表成爲在每一點有三個面方向，它們的曲率爲0；因此，只要三角形三內角和等於兩直角，物理空間的度量關係便確立了。

但其次，如果我們跟歐幾里德一樣，假設不止線獨立於形狀，而體亦然，則結果將是曲率處處爲定數；而知道一個三角形的內角和，便知道所有三角形的內角和。

第三，也是最後，與其假設綫的長度獨立於位置、方向，亦可假設長度與方向獨立於位置。基於這個觀念，位置的差或變化，是用三個獨立單位表示的複數。

2.

在前述討論中，我們先將擴張性或區域性的觀念和度量關係分開，然後發現同一個擴張關係下可以容許不同的度量關係；我們選擇了一套特殊的度量，使得物理空間的度量關係得以由此確定，而所有相關的定理可由此推得。接下來要討論的是，這些假設的產生，是如何依賴經驗。

在這裡，擴張關係和度量關係差別就大了：前述第一種情形的可能狀態是離散的，其得自經驗的理解雖未必完全確定，卻是準確的；而第二種可能狀態是連續的，經驗的取決準確率再高，仍是不準的。這種分別，在將經驗擴充到觀察所不能及的大範圍和小範圍時，會特別重要，後者會在觀察能力之外越來越模糊，但前者不會。

物理空間的建構推廣到超乎量度之大時，注意「無界」與「無限」之別，一個是擴張關係的，一個是度量關係的。空間是一個無界的三元流形這件事，是一個被用於所有的對外在世界的理解的一個假設。擴充感官認知時要用到它，探索物體的可能位置時也要用到它；從這些用途中不斷肯定這個假設。空間無界的性質，其確切性比任何一種外在的經驗都強，但無限性卻無法由此得到；恰恰相反的是，如果假設物體獨立於位置，因而給定一個固定的正曲率（不管多小都可以），則物理空間必屬有限。如果在一個曲面方向把初始向量沿長成最短曲線，可以得到一個正常曲率的無界曲面，因而該曲面若在平的三元流形內，必為一球面，因而是有限的。

3.

超測度之大的問題，對處理自然界現象是沒有用的。但超測度之小的問題則不同。我們對於微觀現象的因果關係的知識，有賴於我們處理無限小問題的精確度。近幾個世紀，人類對於自然界運作方式的理解幾乎全來自建構的

精確性，這種精確性來自無限量分析的發明，以及現代物理所借助的阿基米德、牛頓、珈琍略等人的原理。相對的，在尚無法運用這種原理的自然科學中，它的因果關係仍有賴於微量的分析，但只能做到顯微鏡的放大極限爲止。因此，物理空間的度量關係中，無限小的問題並非無用。

我們若假設物體獨立於位置而存在，則曲率必處處爲常數，而由天文觀測中可知，這個常數不能非 0；至少，其倒數必大到使望遠鏡的觀測範圍變得微不足道。但如果物體不獨立於位置而存在，則無限小的度量關係便不能由無限大的來下結論；每一點的曲率都可以在三個方向自由變動，只要滿足空間中每一個可測量的部分的總曲率顯然是 0。若綫元素無法如先前所述，表爲微分式平方和的方根，關係會變得更複雜。物理空間度量關係的基本認知來自剛體和光束的概念，而他們似在無限小的世界中並不適用；因此可以相當肯定地認爲，物理空間中的度量關係，在無限小的時候並不合乎幾何學的假說。事實上，只要這點能夠更方便我們解釋現象，就應立即接受這個假設。

幾何學的假說在無限小時是否適用的問題，牽涉到空間度量關係的基礎。關於此問題（仍屬物理空間的研究），上述的註脚是適用的；在離散流形中，度量關係的原理已經包含在流形的概念中；但在連續的情形，則必須來自別處。因此，要就是物理空間的深層結構是離散流形，要不就是其度量關係的基礎必須自外界尋找，如作用其上的束縛力。

要回答這些問題，必須從現象的理解出發，理解這些經驗所認可的現象；牛頓打下了它的基礎，並一步步用其所無法解釋的現象加以修正。像前面這種，從一般概念出發的研究，只能保證我們的工作並未受狹隘的觀念所限，傳統的偏見並未阻礙我們理解事物的關連性。

這就把我們帶進了另一個領域——物理學，我想我們就此打住吧！