點點滴滴的數學回憶

我在武陵的研究之路

1983-1986

王金龍

12/11, 2019

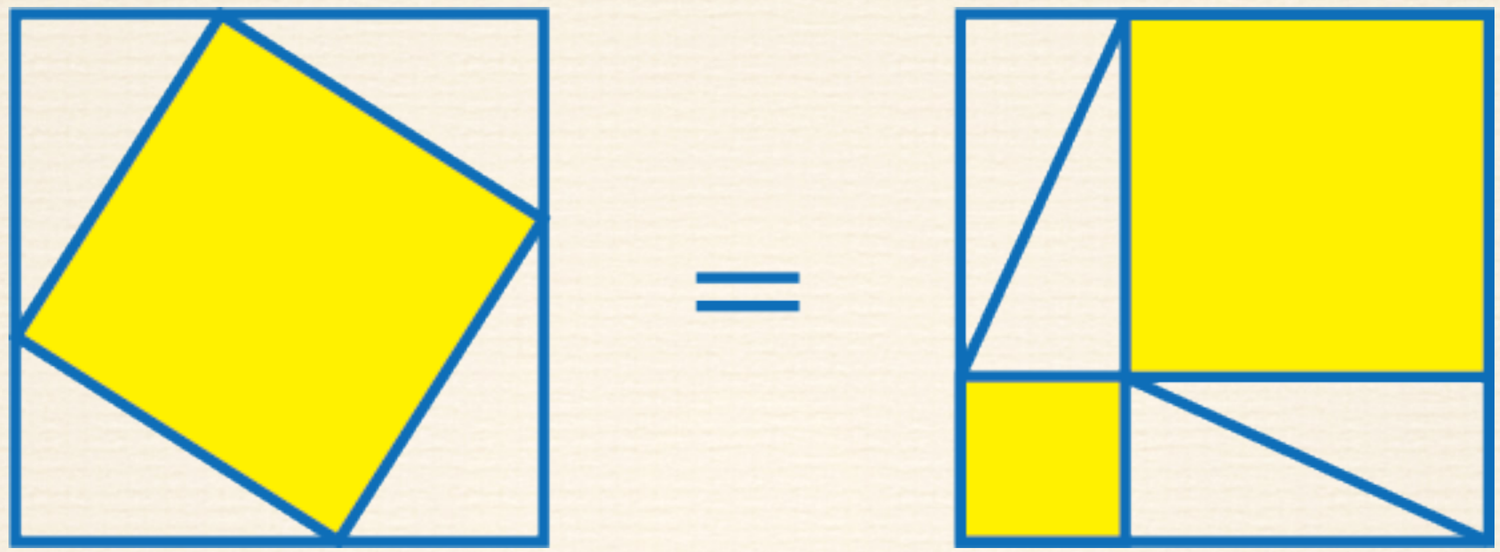
數的起源 - 自然數

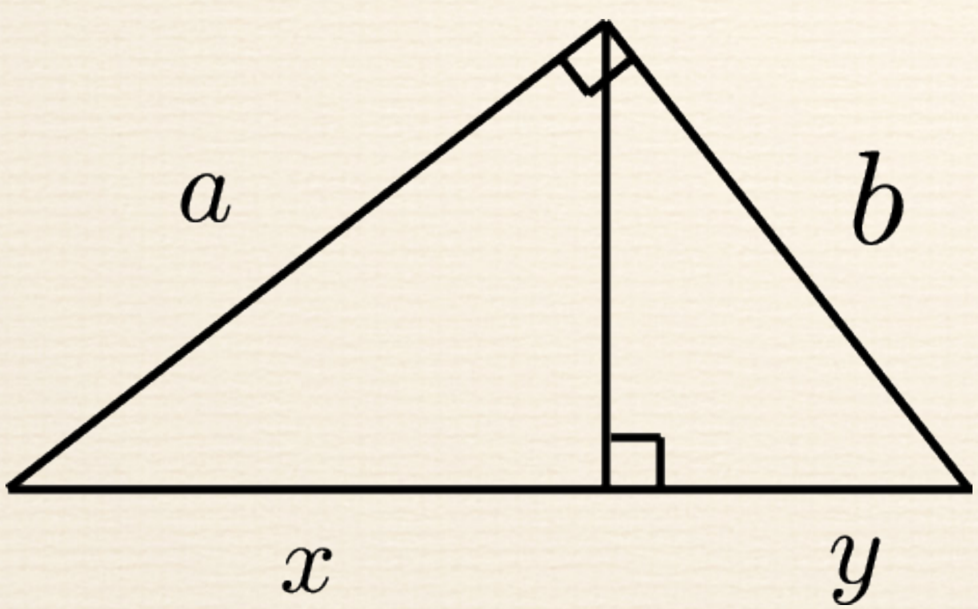
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$, 進而得到
  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset$?

- Q1: 360 的因數個數 ? 因數總和 ?

- Q2: $S_n := 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = ?$

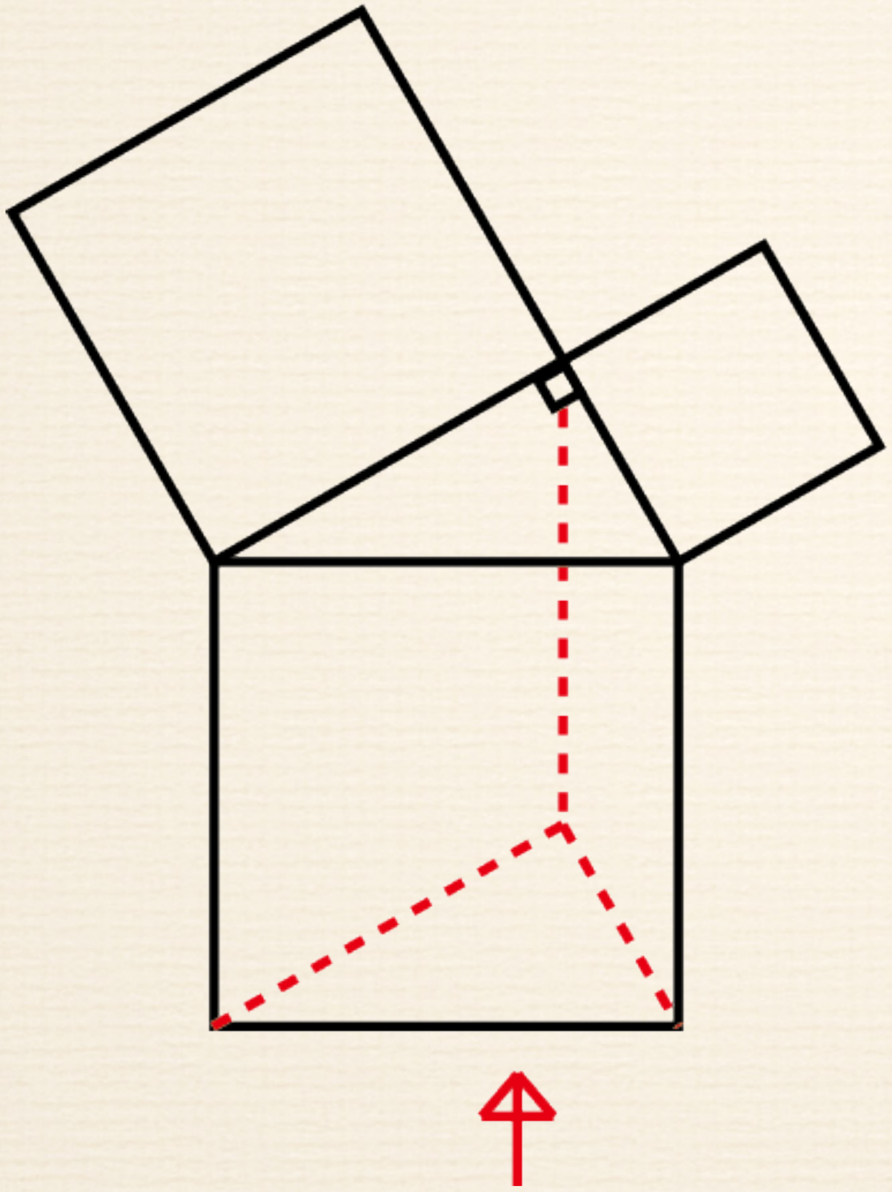
形的起源 - 畢氏定理

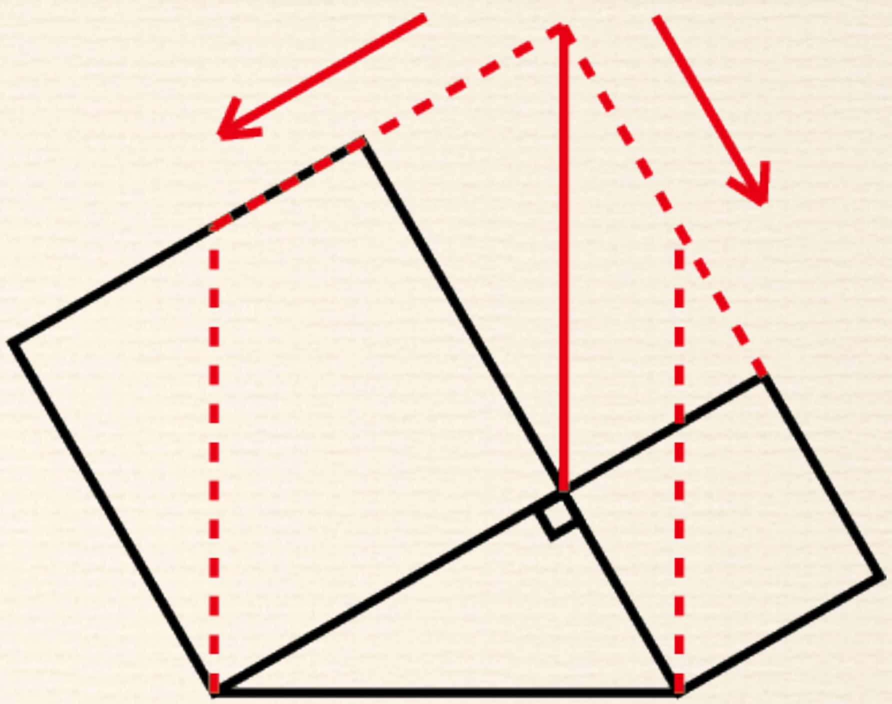




$$x/a = a/c \Longrightarrow a^2 = cx$$
$$y/b = b/c \Longrightarrow b^2 = cy$$
$$a^2 = b^2 = c(x+y) = c^2$$

動畫式的證明



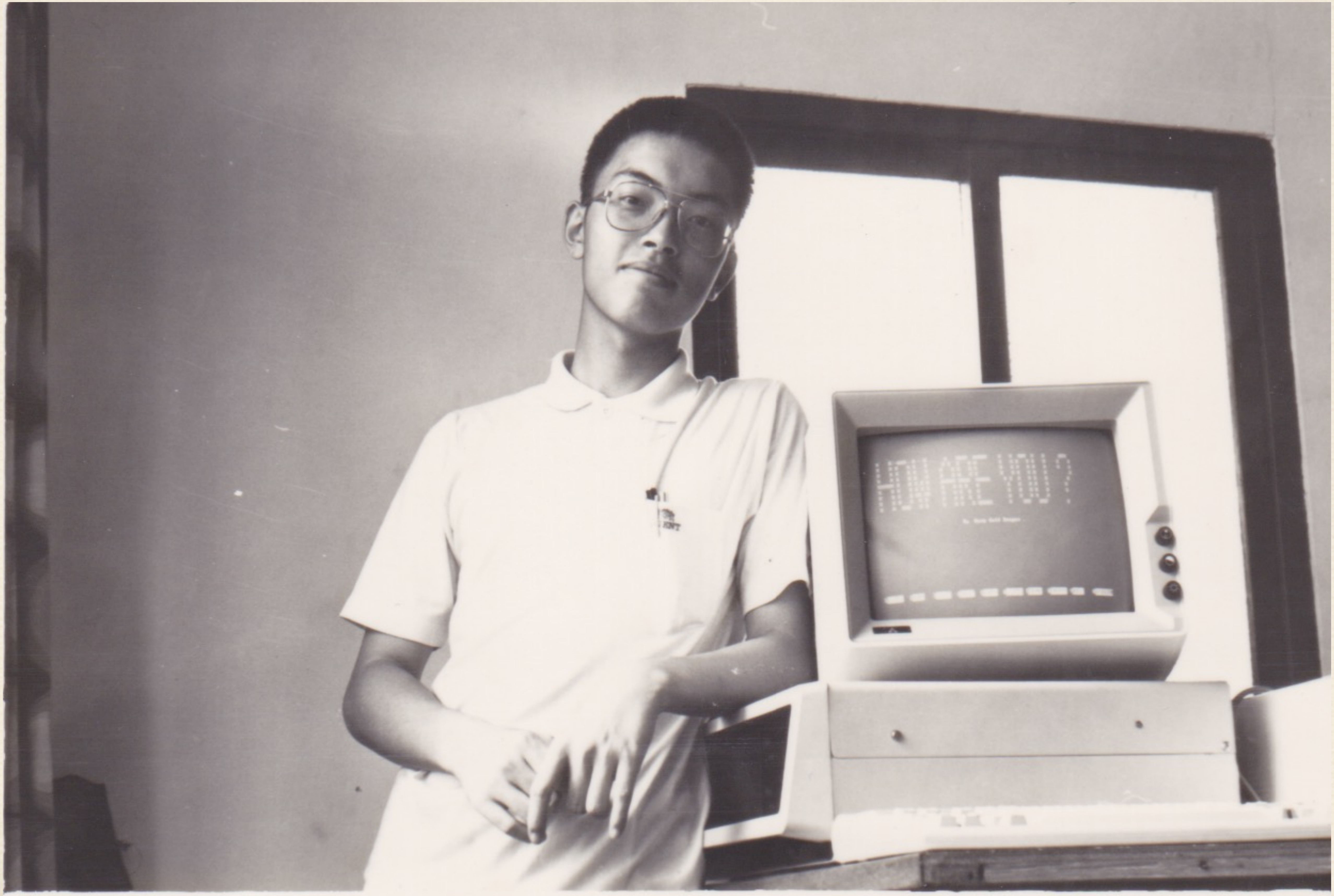


Part I: “高中人才選拔”

Part II: 數學競賽

Part III: 科展

1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
2	4	6	8	A	C	E	10	12	14	16	18	1A	1C	1E
3		9	C	F	12	15	18	1B	1E	21	24	27	2A	2D
4			10	14	18	1C	20	24	28	2C	30	34	38	4C
5				19	1E	23	28	2D	32	37	3C	41	46	4B
6														
7							?							
8										?				
9														
A														
B														
C				?										
D														
E													?	
F														


HOW ARE YOU ?

Part I: 與武陵的邂逅 & 高中人才選拔

- 從畫畫到電玩
- 為何考桃聯 ?
- 夢想實現的第一步: 電腦社, 程式大賽
- 1, 8, 60, 620, 這是什麼數列 ?

武陵青年
33 (1983),
p.128-132

本文將使你對“資訊”建立起具體的觀念，使你對“電腦”不再陌生，更讓你能充滿信心以迎接這資訊時代的來臨。文中為力求客觀、實際以及內容的充實，故引用了許多各階層人士的話，讀完本文，相信必能使你獲益匪淺。

二進位與數位邏輯電路

- 1, 2, 3, 4, 5, … = 1, 10, 11, 100, 101, …
- 1011 = 1000 + 10 + 1, 乘 1000 只是左移 3 bits, 因此關鍵在於二進位 "加法" 如何以電路實現:
- s = p + q = ? 假設位數 (bits) = L, ^ = xor (wedge)
- c = 0, for i = 1 to L do s[i + 1] = p[i]^q[i]^c;
- c = (p[i] & q[i]) or (p[i] & c) or (q[i] & c).

Knuth: The Art of Computer Programming, vol.1, p.19

▸ **8.** [*25*] (a) Prove the following theorem of Nicomachus (c. 100 A.D.) by induction: $1^3 = 1$, $2^3 = 3 + 5$, $3^3 = 7 + 9 + 11$, $4^3 = 13 + 15 + 17 + 19$, etc. (b) Use this result to prove the remarkable formula $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$.

[*Note:* An attractive, geometric interpretation of this formula, suggested to the author by R. W. Floyd, is shown in Fig. 5. The idea is related to Nicomachus's theorem and Fig. 3. See M. Gardner, *Scientific American* **229** (Oct. 1973), 114–118, for other proofs.]

$$\text{Side} = 5+5+5+5+5+5 = 5\cdot(5+1)$$

$$\text{Side} = 5+4+3+2+1+1+2+3+4+5 = 2(1+2+\cdots+5)$$

$$\text{Area} = 4\cdot1^2+4\cdot2\cdot2^2+4\cdot3\cdot3^2+4\cdot4\cdot4^2+4\cdot5\cdot5^2 = 4(1^3+2^3+\cdots+5^3)$$

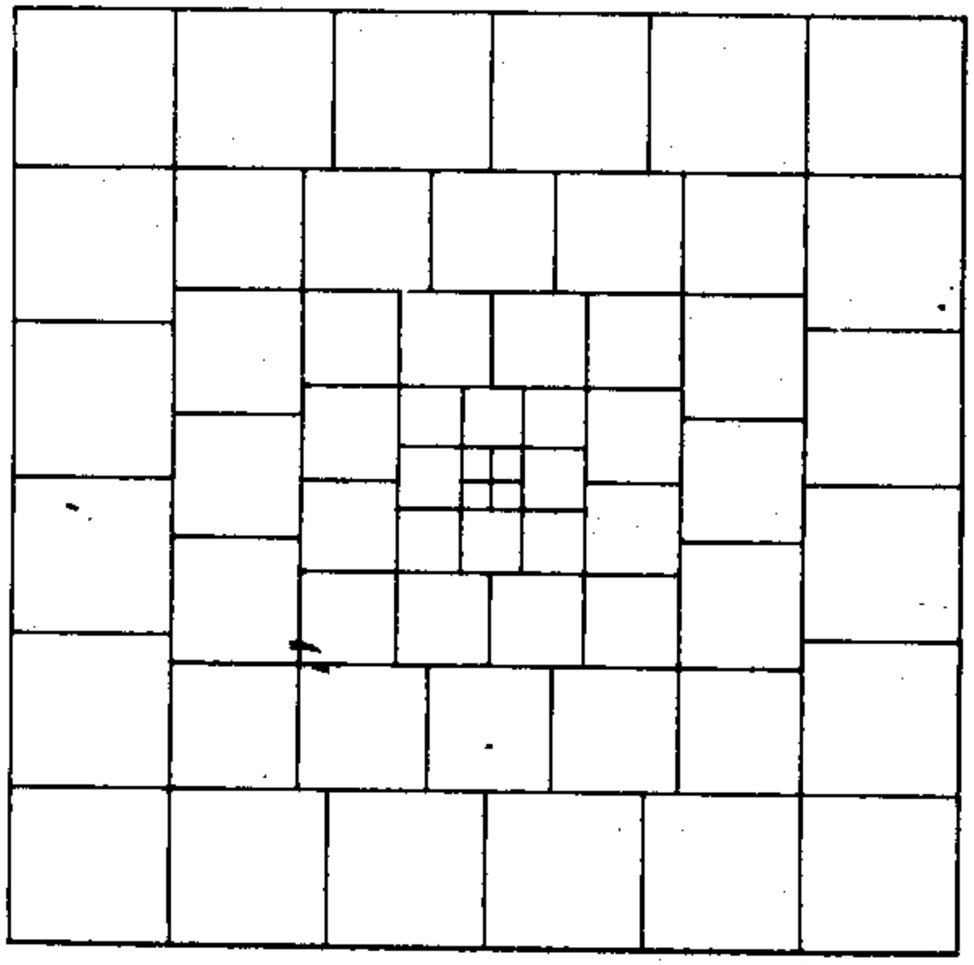


Fig. 5. Geometric version of exercise 8, with $n = 5$.

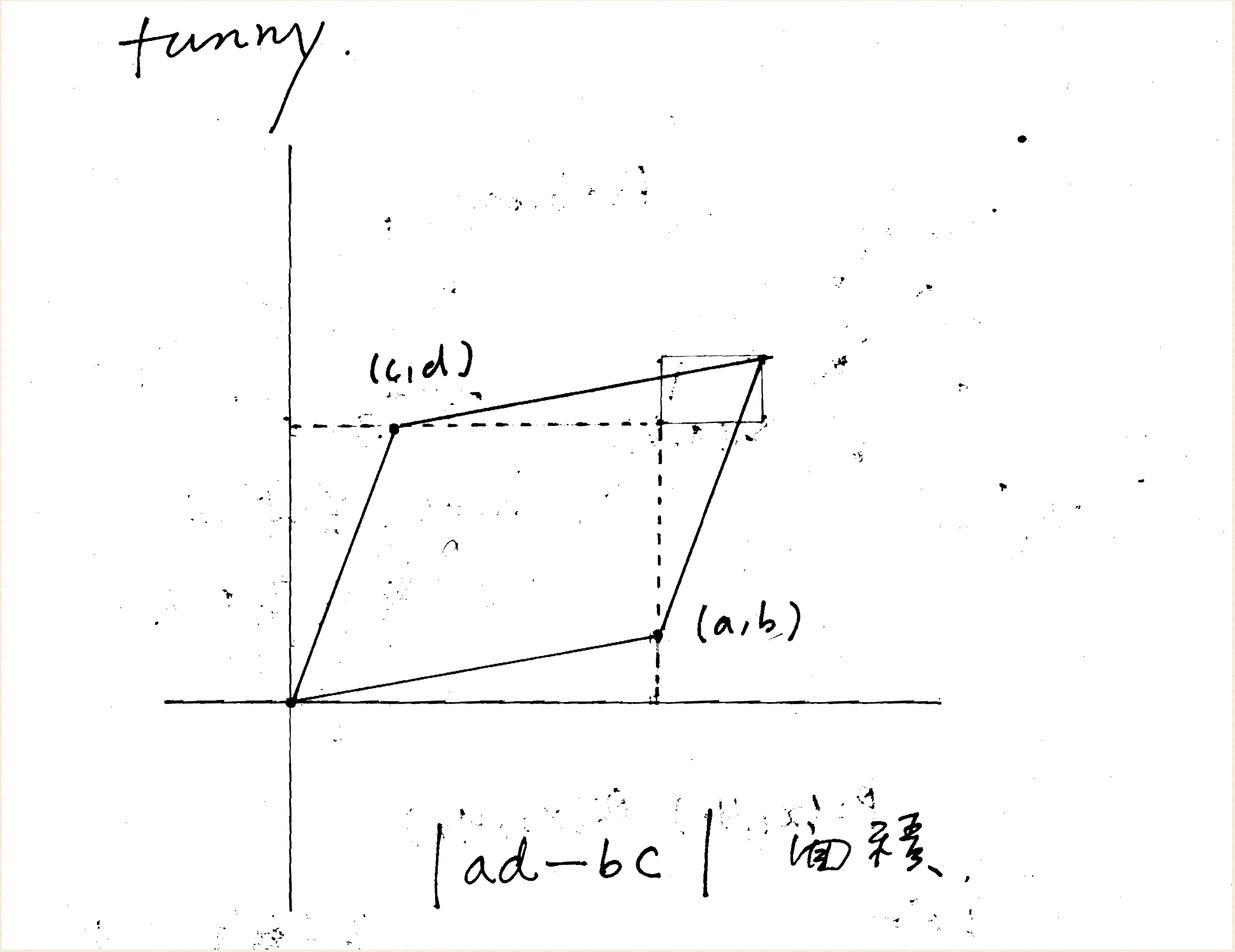
- 高中人才培育計畫, 實驗本
- 盧澄根老師與我
- 微積分, 線性代數, 解析概論 (高木貞治), …
- 脫胎換骨與抉擇之間 ...


THE SCENERIES NEAR CHANG-CHUN BRIDGE

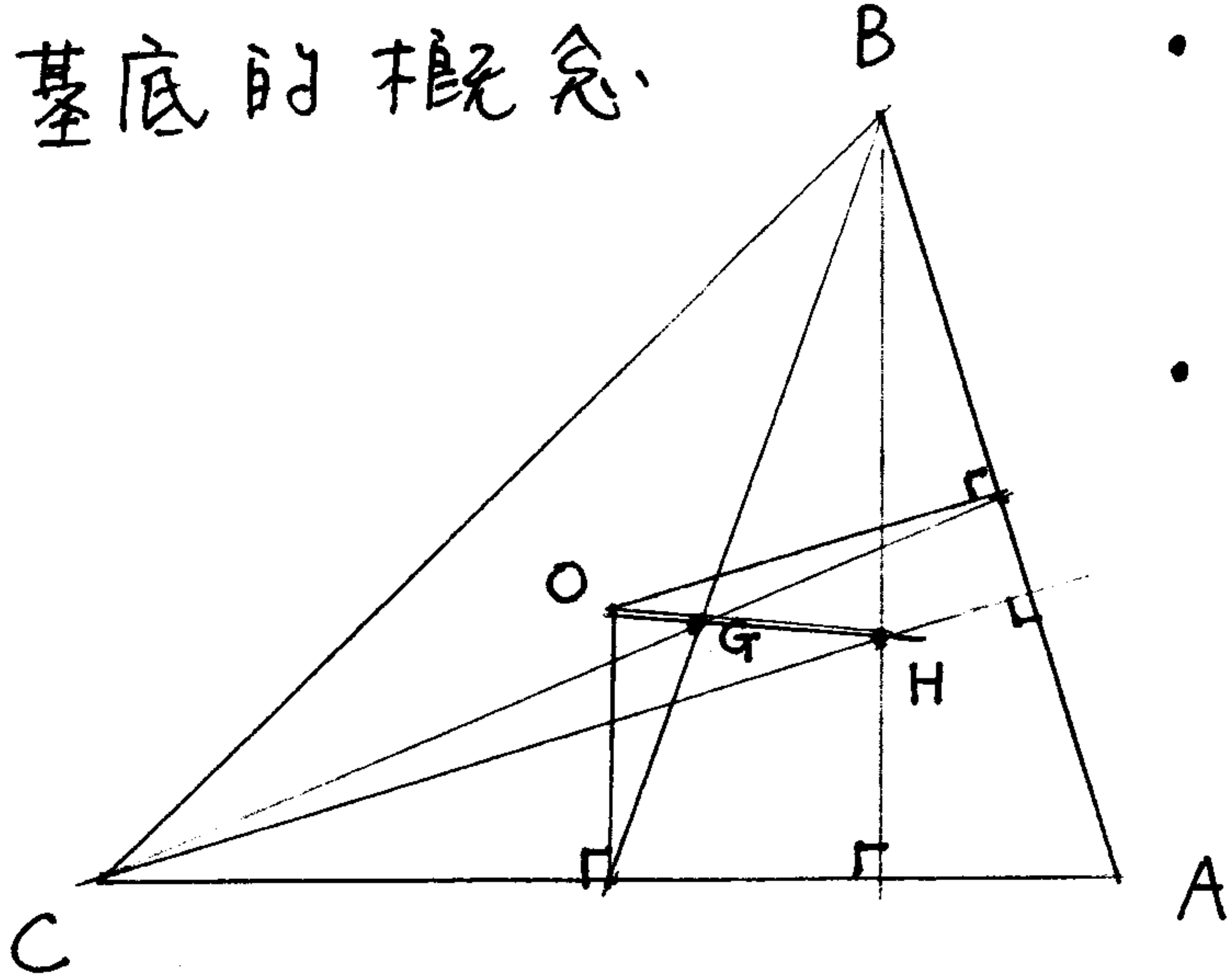
Part II: 數學競賽

- “中華文化復興運動推行委員會” 主辦
- 高一: 臨時被通知, 做一題半
- 高二: 吊車尾進北區複賽, 決賽
- 自主學習之路, 決定志職之時, 跳級遭拒
- 高三: 發高燒 40 度赴決賽

面積與 Cramer's rule



基底的概念

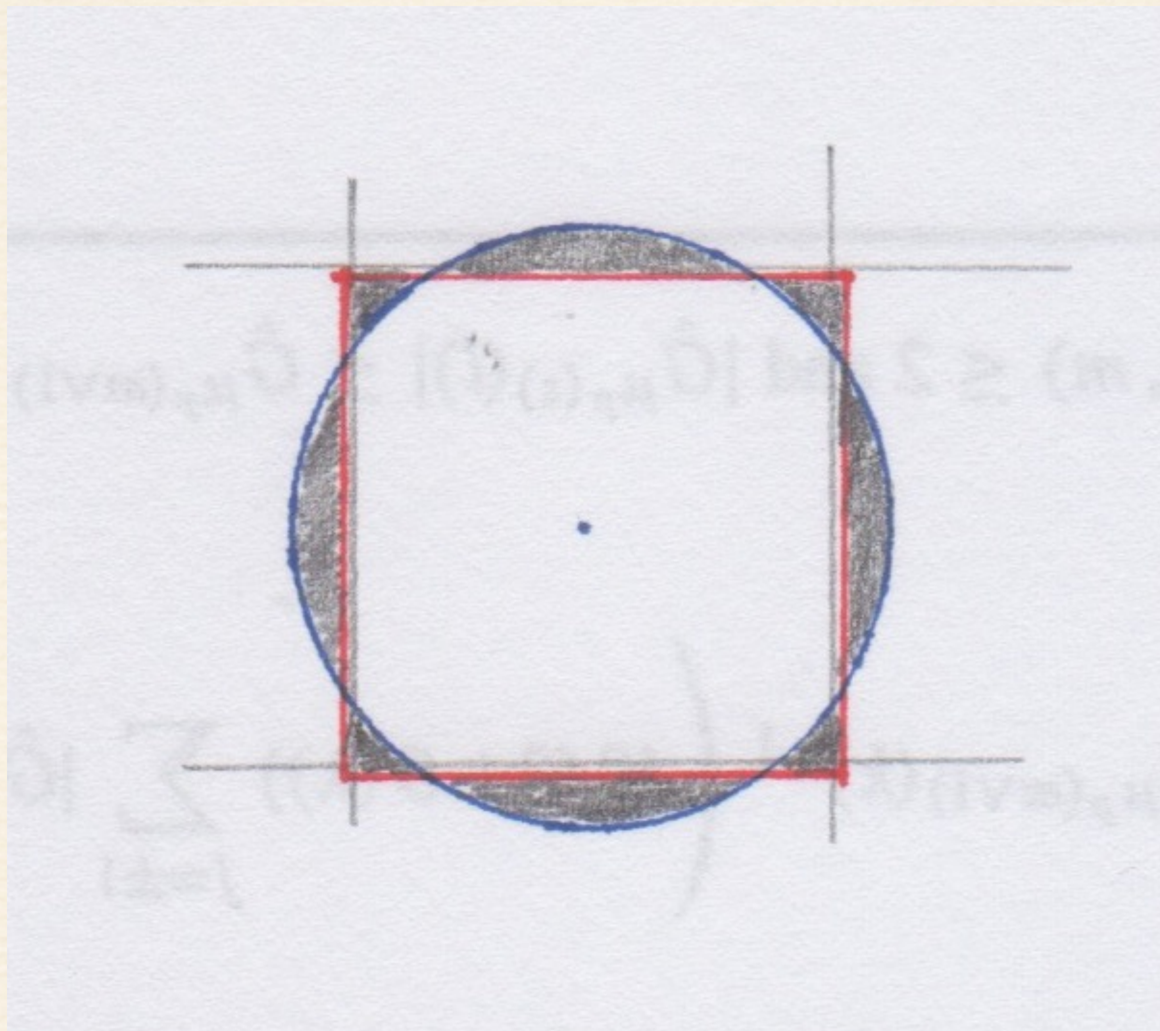


- 尤拉線
  $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$
- △ABC 變動時
  此關係恆保持

方程式的複數解

- 假定 $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ 為相異的複數.
- 考慮方程式 $f(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z - a_i} = 0$.
- 證明所有解都在包含 $a_1, \ldots, a_n$ 的凸多邊形內部.

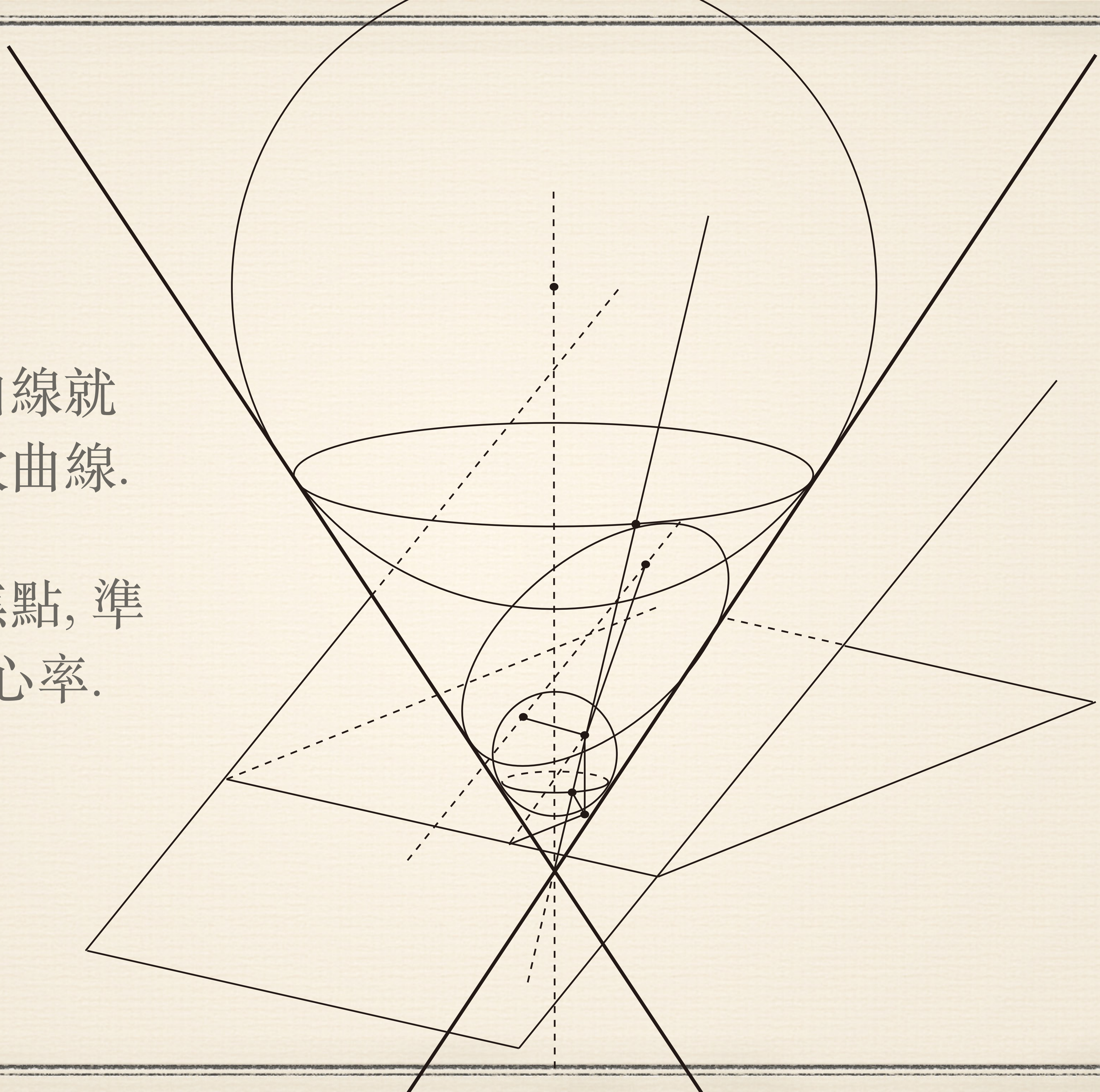
極值問題

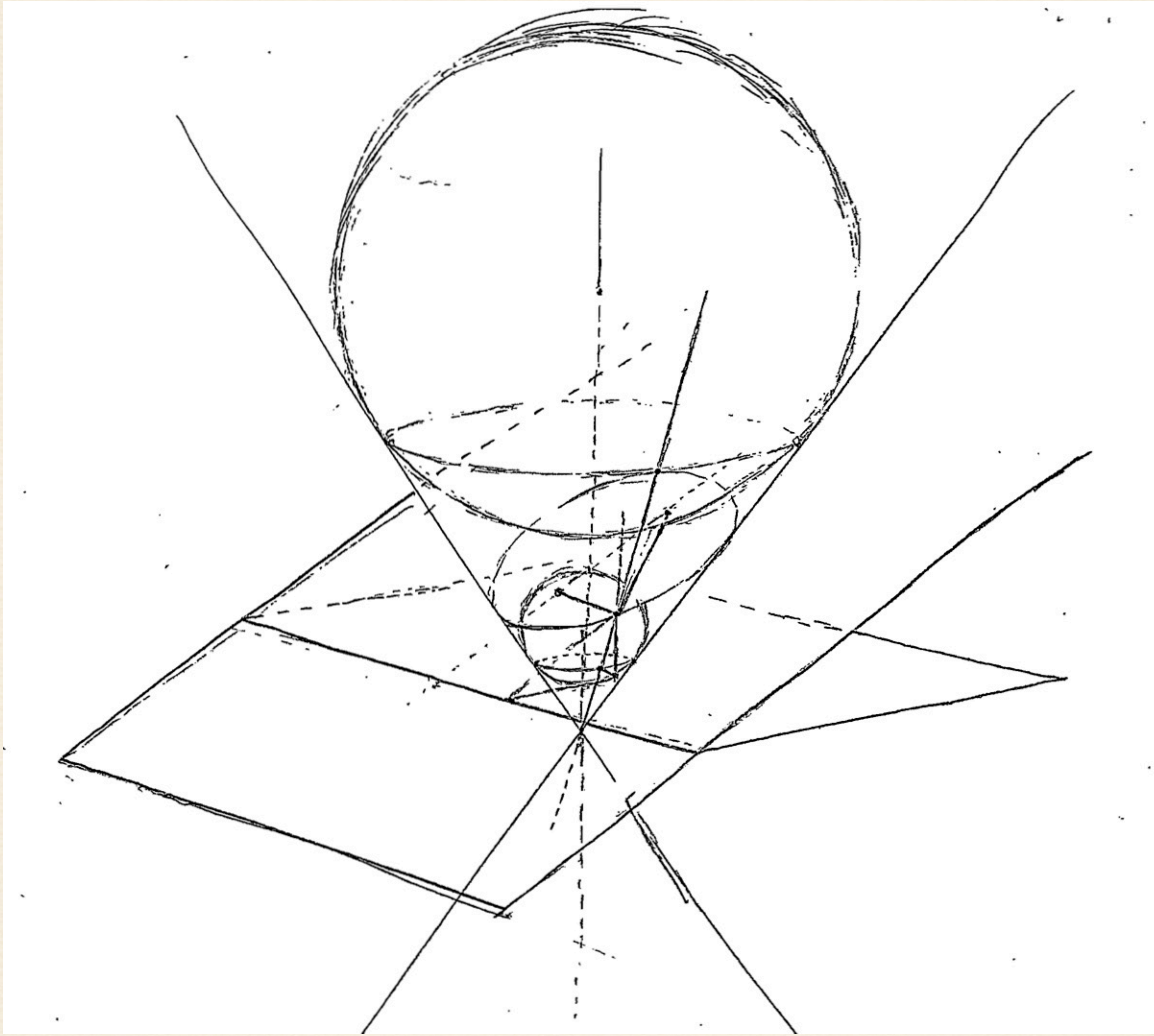


Q: 固定一個單位圓, 同心正方形的邊長為多少時, 圖示的陰影面積有極值？極大還是極小？

圓錐曲線就
是二次曲線.

找出焦點, 準
線, 離心率.





七十四學年度數學競試得獎同學名錄

特等獎二名（獎金 20,000 元，獎狀乙紙）

于如岡（台南一中）　王金龍（武陵高中）

一等獎二名（獎金 10,000 元，獎狀乙紙）

許昭萍（高師附中）　劉艾克（高雄高中）

二等獎三名（獎金 5,000 元，獎狀乙紙）

董維新（建國高中）　王以修（建國高中）　謝敬儒（建國高中）

三等獎六名（獎金 10,000 元，獎狀乙紙）

黃愷悌（建國高中）　張釗泓（建國高中）　蔡振中（建國高中）

楊銘棋（建國高中）　何逸然（台中一中）　王雅瑜（台中女中）

優勝獎五十四名（獎狀乙紙）

葉劭德（建國高中）　蔡啓銘（建國高中）　鄭永銘（建國高中）

栗育力（建國高中）　王光燁（建國高中）　余家富（建國高中）

王佳盈（建國高中）　郭文堂（建國高中）　簡君儒（建國高中）

蔡岱朋（建國高中）　林昭維（建國高中）　江文泰（建國高中）

劉國英（建國高中）　吳忠幟（建國高中）　曾俊智（建國高中）

劉家新（建國高中）　楊忠義（師大附中）　洪士晉（師大附中）

褚建民（成功高中）　吳成煥（中正高中）　葉爾瞻（延平高中）

吳昌俊（光仁高中）　鄭銘洲（武陵高中）　蔡振家（江翠國中）

左: 與侯建威校長, 鄭銘洲. 右: 與于如岡.

PART III:
科展
1985-6

複變數與多變數下牛頓法的討論

高中組數學科第二名

台灣省立武陵高級中學　　作　者：王金龍
指導教師：盧澄根

一、研究動機與目的

一般初微的教科書中都有介紹方程式實數根的逼近法，然而複數根則未見提及，而且書上所提出的收斂條件也不完備，因此引發了研究的興趣，希望藉此研究擴充已知的方法，使其能夠解決一般根逼近的問題。

二、研究內容

㈠牛頓法：衆多逼近法中，牛頓法是效率很高的一種，如圖 1 。

$$\frac{f(X_n)-0}{X_n-X_{n+1}}=f'(X_n)$$

$$\Rightarrow X_{n+1}=X_n-\frac{f(X_n)}{f'(X_n)}$$

若 $X_n \to \beta$，則

$$\beta=\beta-\frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$$

$$\Rightarrow f(\beta)=0$$

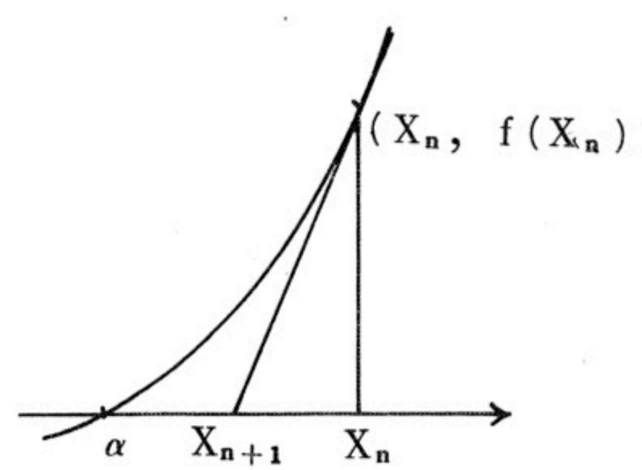


圖 1

牛頓法

- 如何有效逼近任意方程式 $f(x) = 0$ 的解?
- $\dfrac{f(x_n) - 0}{x_n - x_{n+1}} = f'(x_n) \implies x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0,1,2\ldots$
- 若 $x_n \to b$ 則 $f(b) = 0$.
- Q: 若 $f(a) = 0$, 能否在 a 附近找到一個區間 Ω, 使任何起始點 $x_0 \in \Omega$ 之點列 x_n 均收斂於 a ?

- 定理: 假定 $f(a)=0$. 如果函數 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 的附近可以用冪級數展開, 則區間 Ω 存在 !

- 證明: 考慮牛頓映射 $\phi(z)=z-\dfrac{f(z)}{f'(z)}$. 由於 $\phi(a)=a$ (不動點), 因此根據 ``均值定理”,

- $|\phi(z)-a|=|\phi(a)-\phi(a)|=|\phi'(c)|\cdot|z-a|$.

- 如果能夠控制 $|\phi'|\leq r<1$, 就可以找到 Ω.

- 計算 $\phi'(z) = 1 - \dfrac{f'(z)^2 - f(z)f''(z)}{f'(z)^2} = \dfrac{f(z)f''(z)}{f'(z)^2}$.
- 假定 a 是 n 重零點:
- $f(z) = p_n(z-a)^n + p_{n+1}(z-a)^{n+1} + \ldots$
- $f'(z) = np_n(z-a)^{n-1} + \ldots$
- $f''(z) = n(n-1)p_n(z-a)^{n-2} + \ldots$
- 因此 $\phi'(z) = \dfrac{n(n-1)p_n^2 + \ldots}{n^2p_n^2 + \ldots}$, 得到 $\phi'(a) = \dfrac{n-1}{n} < 1$.

丙、多變數聯立方程組實數根的逼近：

若 $f(x、y)=0$ 爲曲線 Γ_1

$g(x、y)=0$ 爲曲線 Γ_2

$\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ 即聯立方程組之根。

如果想要推廣牛頓法到多變數的情形, 首先必須知道函數 $z = f(x, y)$ 在 $(a, b, f(a . b)) \in \mathbb{R}^3$ 的切平面方程.

$\mathbb{R}^3$ 中的平面方程為 $p(x-a)+q(y-b)+r(z-c)=0$, 其中 (p, q, r) 為法向量. 它與 (x, y) 平面交於 $z=0$.

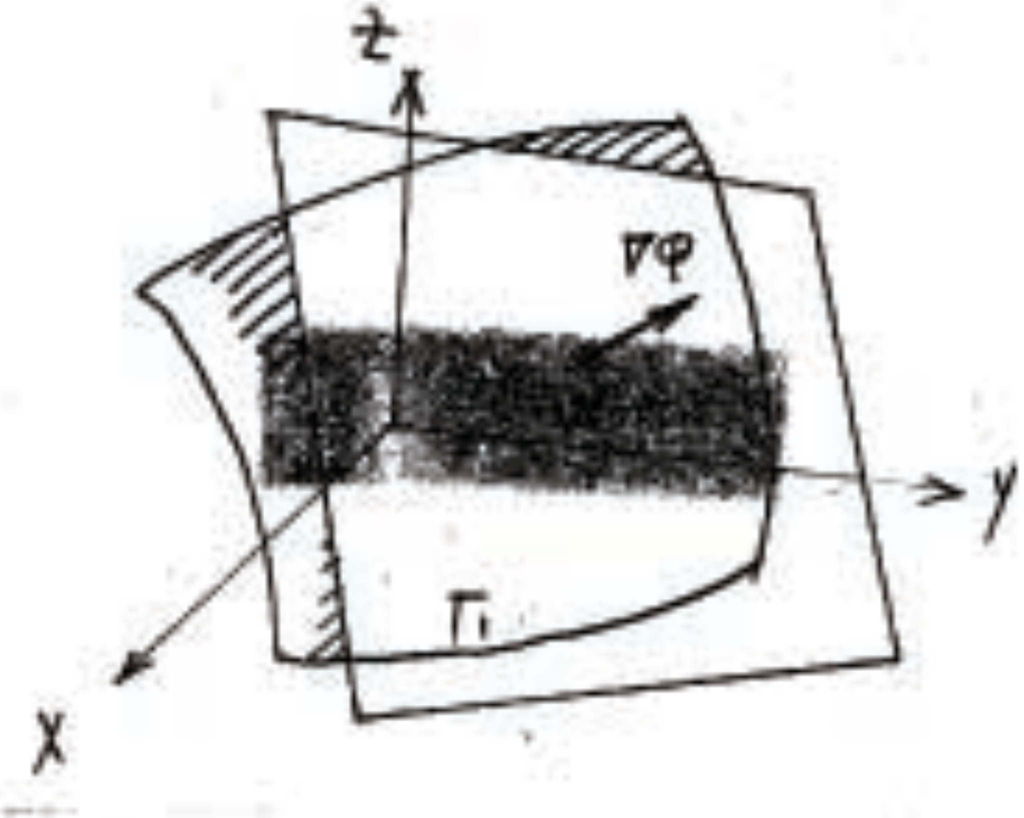


圖 10

設 $\varphi = f(x, y) - Z$，則

$\nabla\varphi = (\varphi_x\ \varphi_y\ \varphi_z) = (f_x, f_y, -1)$

$Z = f(x, y)$ 爲 φ 之零等高面，

由於 $\nabla\varphi \perp$ 等高面，

故 (x_0, y_0, z_0) 上之切平面方程

爲：$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (f_x, f_y, -1) = 0$

令 $Z = 0$，得到在 $x - y$ 平面上之線：$f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0) = -z_0 = -f$

※上式中，f，f_x，f_y 均在 (x_0, y_0, z_0) 取值。

同法用在 $g(x,y)$ 上，得線方程：$g_x(x-x_0)+g_y(y-y_0)=-g$ 解聯立方程組，求 (x,y)，用以逼近 Γ_1，Γ_2 之交點：

$$\begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

，記 $[J_0]=\begin{pmatrix} f_x f_y \\ g_x g_y \end{pmatrix}$，$J_0$ 爲 Jacobian 行列式，若 $J_0(x_0,y_0)\neq 0$，則有：

$$\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}=-[J_0]^{-1}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}-[J_0]^{-1}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

把 $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 記爲 ϕ，令 $\overrightarrow{X_{n+1}}=\phi(\overrightarrow{X_n})$，$\overrightarrow{f}=\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$

則：$\boxed{\overrightarrow{X_{n+1}}=\overrightarrow{X_n}-[J_0(\overrightarrow{X_n})]^{-1}\,\overrightarrow{f}(\overrightarrow{X_n})}$

這種形式和 $X_{n+1}=X_n-\dfrac{f(X_n)}{f'(X_n)}$ 幾乎是等價的，

以下證明行列式的微分公式：

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其中 aij 各元素均爲 x、y、⋯之函數

記 $A = \det[A_1, A_2, \cdots\cdots A_n]$

Ai 表示列向量，則：

$$\frac{\partial A}{\partial X} = \det\left[\frac{\partial A_1}{\partial X}, A_2, \cdots, A_n\right] + \det\left[A_1, \frac{\partial A_2}{\partial X}, \cdots\cdots, A_n\right] + \cdots\cdots + \det\left[A_1, A_2, \cdots\cdots, \frac{\partial A_n}{\partial X}\right]$$

我們只需要 $A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 的簡單情形.

Pf ： $A = \Sigma\ \mathrm{sign}(\pi) \cdot a_{1\pi(1)} \cdot a_{2\pi(2)} \cdots\cdots a_{n\pi(n)}$

π 是任一排列

利用微分的乘法公式：

$$\frac{\partial A}{\partial X} = \Sigma\ \mathrm{sign}(\pi) [\underbrace{\frac{\partial a_{1\pi(1)}}{\partial X} \cdot a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}}_{\text{第一項}} + \underbrace{a_{1\pi(1)} \cdot \frac{\partial a_{2\pi(2)}}{\partial X} \cdots a_{n\pi(n)}}_{\text{第二項}} + \cdots + \underbrace{a_{1\pi(1)} \cdot a_{2\pi(2)} \cdots\cdots \frac{\partial a_{n\pi(n)}}{\partial X}}_{\text{第 } n \text{ 項}}]$$

將 n 項拆開後便得證。

回到牛頓法的向量形式，並設 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{\phi} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$，係平面→平面，依克萊

瑪法則解 u、v 得：

$$U = X - \frac{\begin{vmatrix} f & f_y \\ g & g_y \end{vmatrix}}{J_0}, \quad V = Y - \frac{\begin{vmatrix} f_x & f \\ g_x & g \end{vmatrix}}{J_0}$$

$$又 U_x = 1 - \frac{\left(\begin{vmatrix} f_x f_y \\ g_x g_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f\ f_{xy} \\ g\ g_{xy} \end{vmatrix}\right) J_0 - \begin{vmatrix} f\ f_y \\ g\ g_y \end{vmatrix} J_{0x}}{J_0^2} = \frac{-\begin{vmatrix} f\ f_{xy} \\ g\ g_{xy} \end{vmatrix} J_0 + \begin{vmatrix} f\ f_y \\ g\ g_y \end{vmatrix} J_{0x}}{J_0^2}$$

$$u_y = - \frac{\left(\begin{vmatrix} f_y f_y \\ g_y g_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f\ f_{yy} \\ g\ g_{yy} \end{vmatrix}\right) J_0 - \begin{vmatrix} f\ f_y \\ g\ g_y \end{vmatrix} J_{0y}}{J_0^2} = \frac{-\begin{vmatrix} f\ f_{yy} \\ g\ g_{yy} \end{vmatrix} J_0 + \begin{vmatrix} f\ f_y \\ g\ g_y \end{vmatrix} J_{0y}}{J_0^2}$$

$$V_x = \frac{-\begin{vmatrix} f_{xx} & f \\ g_{xx} & g \end{vmatrix} J_0 + \begin{vmatrix} f_x & f \\ g_x & g \end{vmatrix} J_{0x}}{J_0^2}$$

$$V_y = \frac{-\begin{vmatrix} f_{xy} & f \\ g_{xy} & g \end{vmatrix} J_0 + \begin{vmatrix} f_x & f \\ g_x & g \end{vmatrix} J_{0y}}{J_0^2}$$

當 $f = 0$ 且 $g = 0$ 時，可知 $U_x = U_y = V_x = V_y = 0$，

同時當然有 $[J] = \begin{pmatrix} U_x U_y \\ V_x V_y \end{pmatrix} = 0$ 且 $J = 0$。

如果 $f(Q) = g(Q) = 0$, 我們必須假設 $J_0(Q) \neq 0$.

在此並假設了 J 在 $f=0$，$g=0$ 點上的連續性，本來要證明點列 X_n 之收斂性，應該可以考慮 $|J|<1$ 下的縮小映射原理，即若 $\phi(Q)=Q$，$J(Q)=0$，必存在 $\delta>0$，使若 $|P-Q|<\delta$ 則 $|J(P)|<1$，如此一來，任何在 $|P-Q|<\delta$ 內之區域 Ω 經 ϕ 映射後得 Ω' 必然有 $\dfrac{|\Omega'|}{|\Omega|}<1$，面積雖縮小了，但 Ω' 卻未必全落在 $|P-Q|<\delta$ 內，故縮小的特性不能連續使用，也就無法證明 Ω 在 ϕ 的重重映射之後會收縮到Q點。

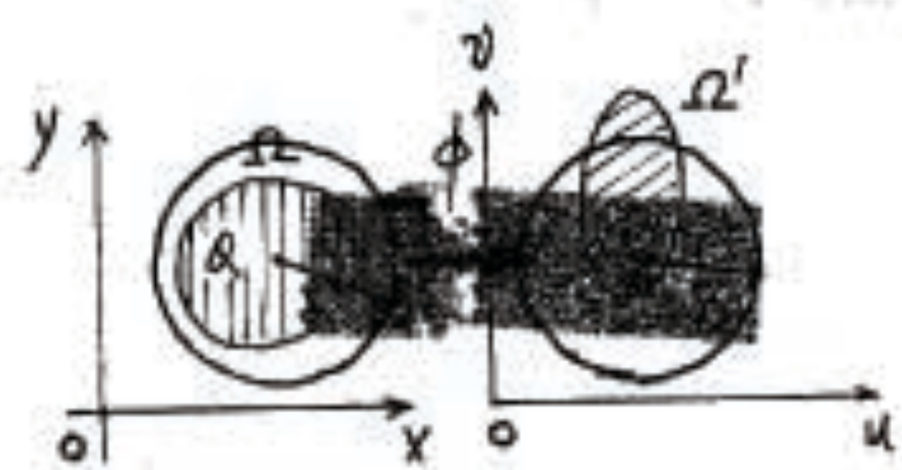


圖 11

既然面積的方法行不通，那就改用弧長的方法：

Q: 有向量形式的均值定理嗎？

設曲線Γ經ϕ映射後爲Γ'，則

$$|\Gamma'| = \int_{\Gamma'} ds = \int_{\Gamma'} \sqrt{du^2 + dv^2} \text{（在 } u-v \text{ 平面上）},$$

但 $du = u_x dx + u_y dy$

$\quad dv = v_x dx + v_y dy$

$du^2 + dv^2 = (u_x^2 + v_x^2)dx^2 + 2(u_x u_y + v_x v_y)dxdy + (u_y^2 + v_y^2)dy^2$ 令此二次形爲 $Adx^2 + 2Bdxdy + Cdy^2$，

故 $|\Gamma'| = \int_{\Gamma} \sqrt{Adx^2 + 2Bdxdy + Cdy^2}$

註記: $ds^2 = \sum g_{ij} dx_i dx_j$ 即 Gauss 的 *first fundamental form*, 或稱 Riemann 度量. 是 Einstein 理論的根本元素.

由於二次形在根號內，故必然是恒正的二次形，有：

$A>0$，$C>0$，$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}>0$，……必然條件。

而 $|\Gamma|=\int_{\Gamma}\sqrt{dx^2+dy^2}$，若要 $|\Gamma'|<|\Gamma|$，可考慮在Γ上處處皆有 $(Adx^2+2Bdxdy+Cdy^2)<(dx^2+dy^2)$

即 $(A-1)dx^2+2Bdxdy+(C-1)dy^2$ 爲恒負，恒負的條件是：

$$\begin{cases} A-1<0 \\ \begin{vmatrix} A-1 & B \\ B & C-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}-(A+C)+1>0 \end{cases}$$

，但由正定時的必然條件，故只要 $A+C<1$，以上兩條件便均成立。

註記: 當時我的線性代數還很嫩, 繞了遠路卻讓我敲開了微分幾何學的大門！

設Q為一零點，$\phi(Q)=Q$，$J(Q)=0$，$u_x=u_y=v_x=v_y=0$，

顯然$A+C=u_x^2+v_x^2+u_y^2+v_y^2=0$，故在連續的假定之下，任何$\varepsilon>0$，必存在$\delta$，若$|P-Q|<\delta$，則$A+C<\varepsilon$，以下取$\varepsilon$是小於1之正數，$\Gamma$在$|P-Q|<\delta$內，並以Q為端點之線段，則$\Gamma'$為一以Q為端點之曲線，且$|\Gamma'|<\sqrt{\varepsilon}|\Gamma|$，理由同前，因此時恒負條件為：

$$\begin{cases} A-\varepsilon<0 \\ \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}-\varepsilon(A+C)+\varepsilon^2>0 \end{cases}$$

，在$A+C<\varepsilon$下當然是成立的。

由於$|\Gamma'|<\sqrt{\varepsilon}|\Gamma|<\delta$，故$\Gamma'$線就算拉成直線仍然落於$|P-Q|<\delta$內，何況是曲線時呢！

結論: 重數為 1 的解一定存在收斂區間 $Q\in\Omega\subset\mathbb{R}^n$.

這個證明顯然可以推廣至 n 個變數, 甚至是 $Q\in\mathbb{C}^n$.

與科學館
朝夕相處

1986

後續發展: 2005, NWMA Gold

ON THE BEHAVIOR OF NEWTON ITERATION

C. C. TSAI

ABSTRACT. We study the multivariate Newton method for the case of non-simple root. We give a criterion for it to converge, in which case the convergence rate will be linear. We then give a modified method to achieve an exponential rate of convergence. In contrast to this, we present also a number of examples to demonstrate some critical phenomenons of the Newton iteration when the criterion does not hold, and discuss possible ways to resolve the problem.

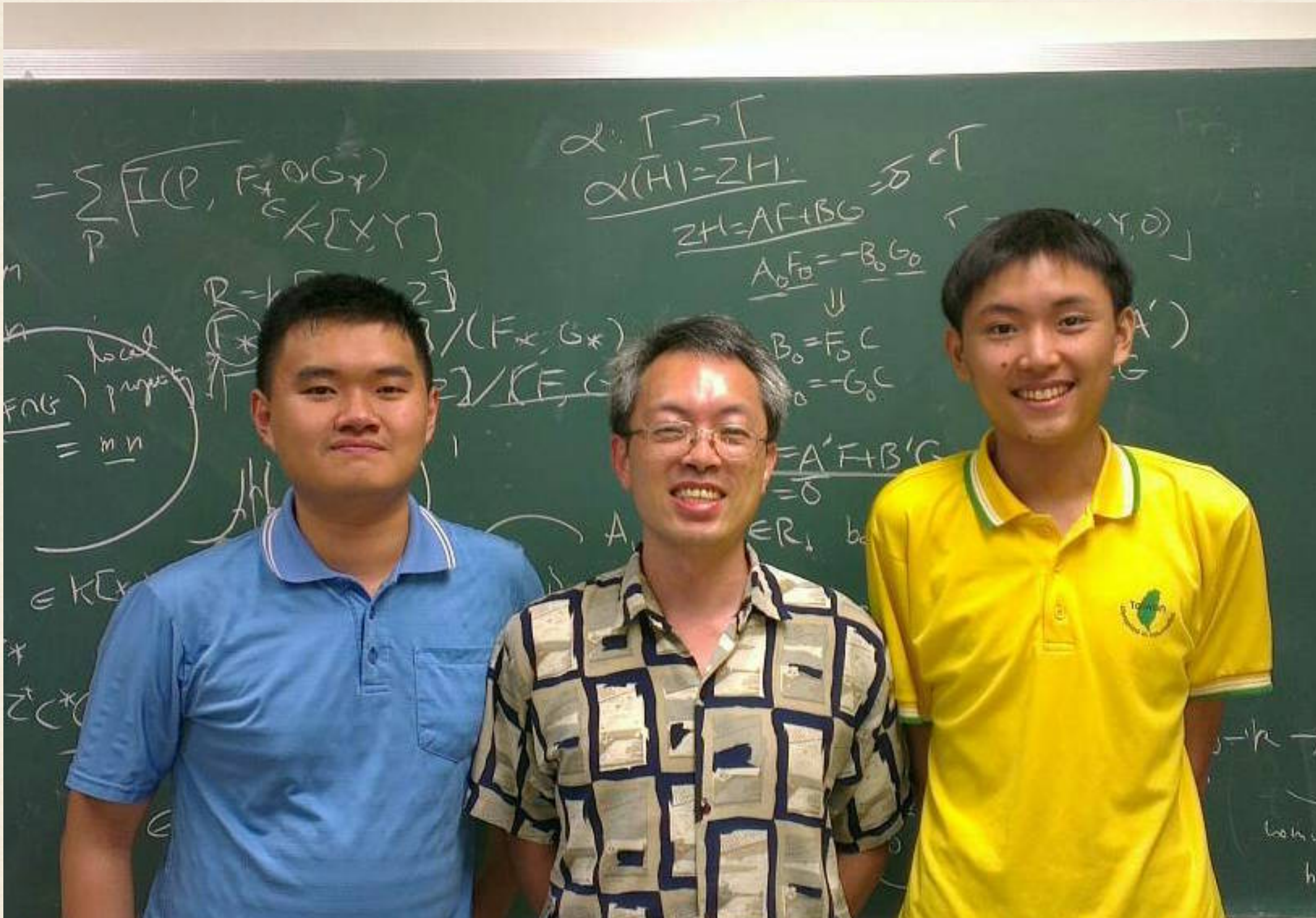
1. INTRODUCTION

The **Newton iteration** provides an algorithm to approximate the roots of smooth maps $f : R^n \to R^n$ from Euclidean n-space to itself. Namely

$$x \mapsto N(x) := x - (Df|_x)^{-1} f(x).$$

For the one-variable case it is well known that the Newton iteration always converges locally at any root, unless the derivative of all order vanish there. For multivariate case, the method is efficient if the root a is a simple root, i.e. the Jacobian of the map $\det Df|_a$ at a is non-zero. If $\det Df|_a = 0$, the Newton iteration is undefined at a, and therefore difficult for us to analyze its local behavior.

蔡政江, 我, 陳伯恩, 2015



The Secretary Problem: Two-Player Extensions and Going Back*

Brian Chen (betaveros.celcion@gmail.com)

May 2009, revised June 2009

Abstract

The *Secretary Problem* is a thoroughly-studied optimal-stopping problem in which a person must try to select the best applicant from a given number of them. The problem is that he must interview them sequentially, must decide whether to accept the applicant just after the interview, and cannot return to previous applicants. The $1/e$ optimal strategy for this is well known, and many extensions of it have been studied. Here we will study some more generalizations:

Firstly, a fairly simple generalization is presented that allows the person to return to previous applicants, with a fixed probability of success. Through this problem we will return to the classic problem and demonstrate the "sum the odds to one and stop" rule, and from that the $1/e$ optimal strategy.

Next, the main course is two generalizations of the problem involving two players each. In the first one, one player is more powerful than the other, and when both players want a certain secretary the first player will receive her. We will find the optimal strategy and probability of success for this, then go on to a scenario where the weaker player can choose between helping the stronger player and receiving the privilege of a coin flip, or not helping and remaining weak. On the way, we will derive a formula for determining the probability of a set number of candidates (secretaries who are better than previous ones) occuring in a number of applicants.

後記

- 特別感謝 侯建威 校長, 盧澄根老師
- 與 “一班” 的所有老師與同學們
- 同學們都已經是國內外各行業翹楚
- 我兒重陽, 外甥許家瑋後來也都是武陵人 ...


武陵高中1986畢業三年一班
2015年同學會 舒果桃園大同店
作者: Picasso Hu
武陵高中1986畢業三年一班 2015.07.26

物理老師總是搶先一步
佔用國文課, 國文老師
就拉我去打羽球！

荒山茉莉 Post Rock. 12/13 (五), 華山文創 大團誕生年終場

感謝你的參與

再會！