

數學之美

從理性思維到真實世界的探索

王金龍

2015.11.09

觀測, 地球在宇宙中的意義?

- 地球不是平的 (亞里斯多德 **BC 384-322**, 托勒密 **90-168**)
- 地球不是宇宙的中心, 太陽才是 (哥白尼 **1473-1543**, 伽利略 **1564-1641**)
- 月球繞地球, 但太陽沒有繞地球 (布魯諾 **1548-1600**)
- 地球繞太陽, 但不是一個圓 (克普勒 **1571-1630**, 牛頓 **1643-1727**)

冥想, 從中我們能得到什麼?

- 愛因斯坦 1879-1955: 沒有絕對時間的概念 (假設光速 c 是恆定的, 約 3×10^8 m/s)
- 四維時空, 狹義相對論 (1905), 從伽利略變換到勞倫茲變換
- $E = m c^2$
- 核能

觀測與冥想, 重力理論

- 時空是彎曲的, 愛因斯坦 **1915** 廣義相對論成功解釋水星近日點的反常軌道, 及光在重力場中的偏折現象
- 光走最短距離, 即測地線, 因此可以反過來了解時空的“幾何結構”
- 高斯 **1815**, 黎曼 **1855** 已經創造這個理論!

幾何 = 測量

- 畢達哥拉斯 580-500 BC, 歐幾里德 325-265 BC: 直角三角形

$$z^2 = x^2 + y^2$$

- 高斯 1815, 曲面論

$$ds^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2$$

- 高斯曲率,

$$K = dN(A)/dA$$

- 僅依賴於距離的概念

$$C(r) = 2\pi r - K \pi r^3/3 + \dots$$

高維度空間 $\dim M = n$

- 黎曼 1855,

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx_i dx_j$$

- 泰勒展開式, 在一個點附近使用正規座標系之下,

$$\text{體積密度} = \det (g_{kl}(x))^{1/2} = 1 - \sum_{i,j=1}^n R_{ij} x_i x_j / 6 + \dots$$

- $(R_{ij})_{n \times n}$ 稱為 Ricci 張量 (對稱), 其 trace 為純量曲率

$$R = R_{11} + \dots + R_{nn}$$

宇宙的膨脹與封閉

- 愛因斯坦重力場方程, $n = 4$,

$$R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} = T_{ij}$$

- (T_{ij}) 為空間中的能量/應力張量
- 天文觀測發現 T_{ij} 分布均勻, 即 $\approx \lambda g_{ij}$, $\lambda > 0$. 微分幾何的張量計算可得對於空間方向 $(R_{ij}(x))_{3 \times 3}$ 是正定矩陣, 且其特徵值大於常數 λ
- 直觀 (測地線變分法) $\rightarrow$ 三維空間截面 S_t 的封閉性

大爆炸與黑洞

- 霍金 **Hawking** 1942-, 愛因斯坦方程對時間可逆, 因此宇宙有起始點
- 除非存在黑洞 (時空奇異點), 量子重力場論?
- **Weinberg—Salam—Glashow** 基本粒子的標準模型 **standard model**, $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 規範場論
- 萬有理論 **GUT: The theory of everything?**

弦論 String Theory

- Veneriano 1968, 描述原子核強作用力

$$B(x + y) = \Gamma(x) \Gamma(y) / \Gamma(x + y)$$

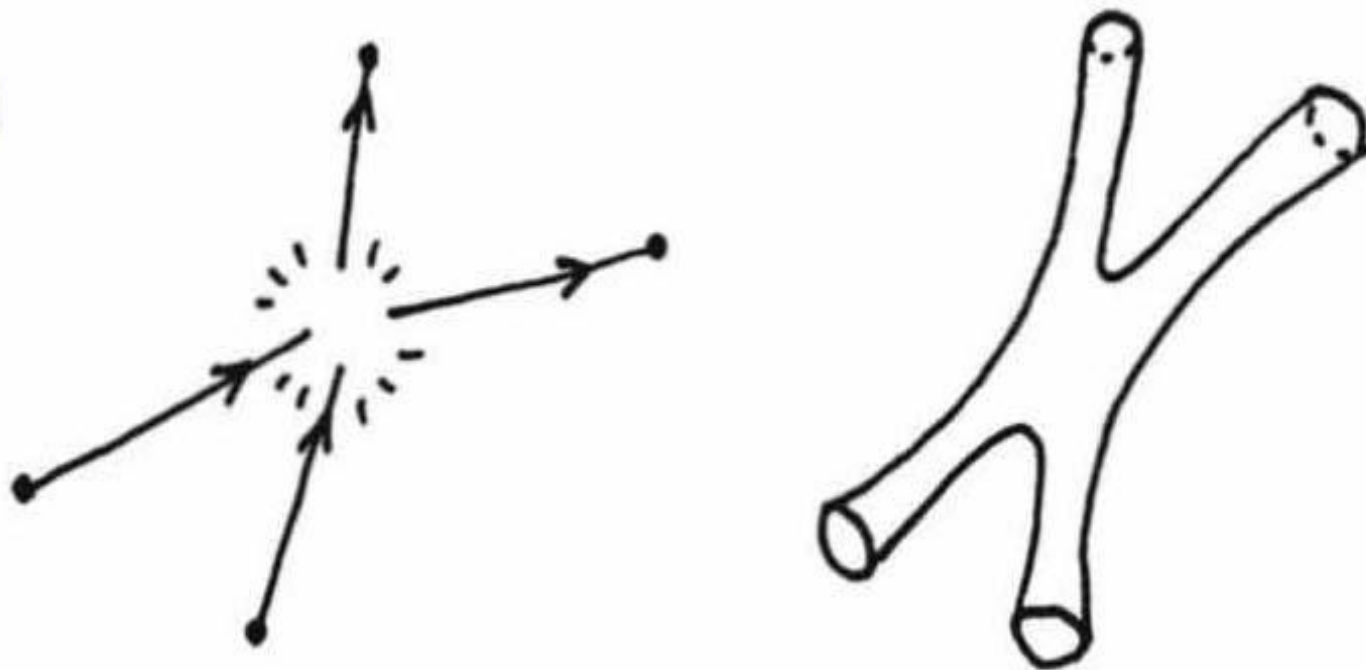
- 其中 $\Gamma(n + 1) = n!$ (如果 $x = n$ 是自然數)
- 亦可描述小段彈性繩的振動模式
- 質點 $\rightarrow$ 弦 ($[a, b]$, (a, b) , 或 S^1 的軌跡)
- 運動軌跡 $\rightarrow$ 曲面
- 碰撞 $\rightarrow$ 光滑曲面

2. 幾何觀點下的弦論

- 20 世紀中頁以來許多基本粒子被相繼發現。弦論認為，粒子其實是由弦（一條線段或圓圈）所構成。
- 弦的各種不同的震動形式決定了其在古典觀測下不同的粒子行為。
- 粒子在時空裏運動的軌跡在弦論中變成了二維的曲面（世界面，world sheet）。

- 這個模型自然地克服了一些奇異點的困擾。例如粒子的碰撞在弦論裏變成是一個光滑變動的過程。

圖 1



量子化 Quantization

- **Polyakov 1970's** 第一次革命: **Feymann** 路徑積分量子化 (找到 **Action**, 對所有可能求和) 得到 **Bosonic strings**
- 問題: 缺少 **Fermion variables**, 無法解釋一些已知的基本粒子如夸克, 輕子 (符合 **Pauli** 互斥原理, 半自旋)
- **Fermion** 的數學形式: 斜交換的變數
$$\psi_1 \psi_2 = - \psi_2 \psi_1$$
- 額外維度存在, 時空 **D = 26** 維!

超對稱 SUSY

- Schwarz—Witten 1980's 第二次革命: superstring theory (超弦理論), 時空 $D = 10$ 維

$$M = R^{3,1} \times X$$

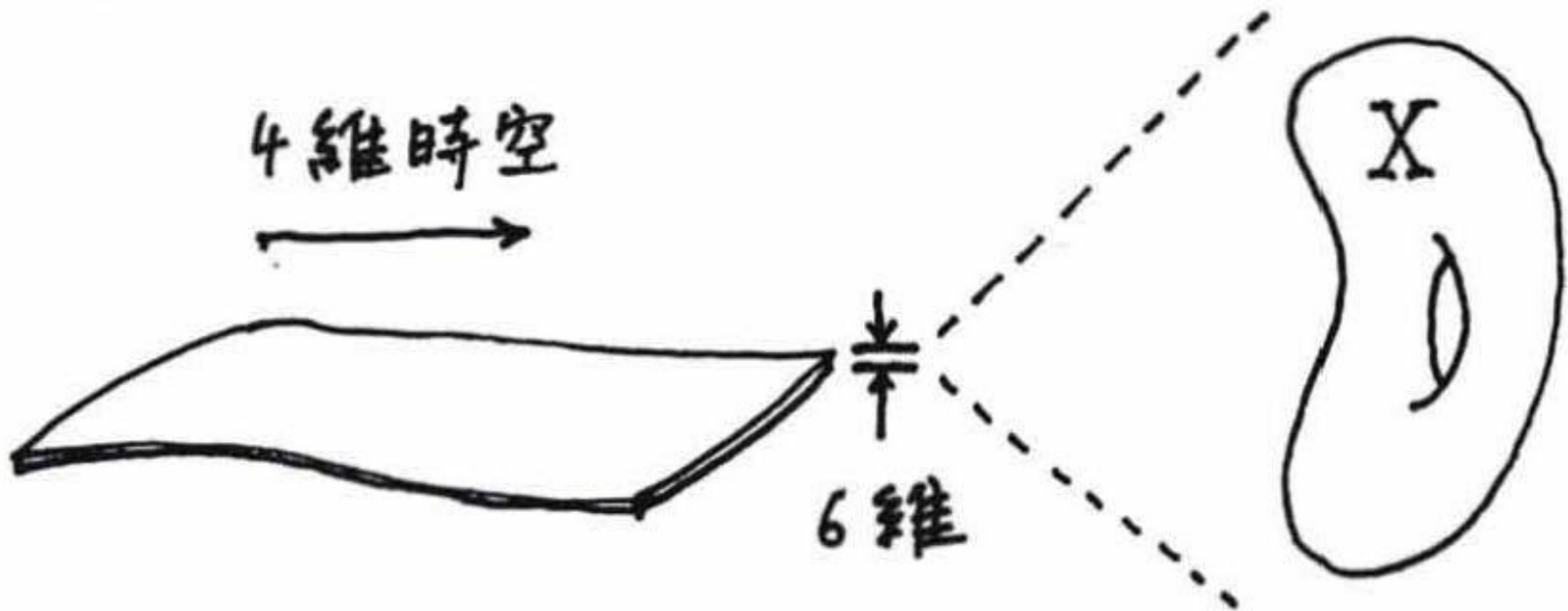
- X 是一個實 6 維 (複 3 維) 的 Calabi—Yau 空間

$$R_{ij} = 0$$

- I, IIA, IIB, two heterotic $SO(32)$ and $E_8 \times E_8$
- Duality, M 理論

- 對於這多出來的 $6 = 10 - 4$ 維，它形成一個捲曲在極小尺度的彎曲流形 X ，以至於在正常相對論時空的尺度之下人們感受不到其存在。

圖 2



Quantum effects

- 但是 X 在小尺度之下，其量子效應便趨於顯著。這些量子現象經由物理推論，其衍生的量可以通過幾何學給予精確的數學描述。
- 這使得雖然我們尚無法設計實驗驗證弦論，數學家卻可能透過數學證明來取代實驗，進行驗證！

哪一個內在空間描述宇宙？

- Calabi—Yau 空間 X 有很多, 只須符合 $c_1(X) = 0$

$$x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 = 1, \quad x_i \in \mathbb{C}$$

$$f(x) = g(x) = 0, \quad \deg f + \deg g = 6$$

$$f = g = h = 0, \quad \deg f + \deg g + \deg h = 7$$

- 1990, 約 1000 種
- 2010, 約 100000000 種, now 10^{500} ?
- 至少 30000 種具有不同的拓樸 topology

佛有萬象, 真神只有一個!?

- 每一種 X 都可以作為內在空間? 他們都具有相同的能力用以描述世界? 抑或有多重宇宙?
- 通過時空奇異點 (of Einstein 方程) $R^{3,1} \times X_0$, 奇異點可以發生在 X_0 , 而不在古典的時空 $R^{3,1}$
- 經過奇異點 X_0 , 空間 X 轉換到另一個內在空間 Y
- $X \rightarrow Y$ 稱作一個空間手術, 如把一個 S^3 手術成 S^2 !

最終挑戰, 數學證明?

- 弦理論至今無法實驗證實, 其尺度遠小於現今實驗的觀測尺度
- **Surgery in $D = 6$** , 維持 Calabi—Yau 條件的空間手術最基本且關鍵的形式為

$$\delta(S^3 \times D^3) = S^3 \times S^2 = \delta(D^4 \times S^2)$$

- 一般稱為錐點轉換 (conifold transition)

LLW 研究團隊

- Yuan-Pin Lee (李元斌), Hui-Wen Lin (林惠雯) and Chin-Lung Wang (王金龍)
- [1] *Invariance of quantum rings under ordinary flops*, Annals of Mathematics 2010.
- [2] *A + B theory in conifold transitions of Calabi—Yau threefolds*, preprint 2015

數學之美, 在於真善,
不為什麼, 好奇而已!

20 年的探索, 故事還在繼續中

THANKS