幾何, 弦論與量子環的不變性

(慶祝中央大學數學與理論物理中心開幕)

王金龍

臺大數學系

2008/9/26

1. 前言

- 在二十世紀初期, 也就是近一百年之前, 數學與理論物理學的發展有著息息相關, 相輔相成的關係.

- 在大尺度的世界裡, 黎曼幾何成爲了愛因斯坦的廣義相對論的自然語言, 相對論也提供了二十世紀幾何研究的自然素材.

- 在小尺度的世界裡, 量子力學的發展融合了數學中的分析 (變分法, 希伯爾特空間算子論), 幾何 (哈彌爾頓力學, 辛幾何學), 代數 (群表示理論), 以及機率統計方法, 並與這些數學理論的研究平行地成長.

- 那是一個輝煌的年代, 其成就也為近代科技奠定了堅實的理論基礎.

- 不過, 很快地 (約在二戰之前) 數學與物理在各自的世界裡面臨了本質不同的挑戰.

- 數學面臨自身論證基礎的一致性問題. 數學家被迫重新檢視其公設系統, 數理邏輯. 每一個數學的分支都不能倖免於這一波可能撼動數學千年根基的嚴峻考驗.

- 除了電腦的發明, 數學的應用漸漸遠離了數學發展的核心. 法國的布爾巴基學派 (Bourbaki) 是這一個時期的代表. 甚至有數學家以其研究與實體世界毫無關聯而引以為傲.

- 在 70 年代中期, 透過規範場論與矢量叢理論, 數學與物理的研究似乎又重新找回共通之處時. 數學家 Dieudonne 仍然堅稱數論將爲數學保留一塊永不受科學污染的淨土 (近年來的發展顯示, 數論與物理的研究也愈趨相關).

- 另一方面, 在理論物理的發展歷史上, 如何將大尺度與小尺度的作用力在一致的理論中實現 (所謂的統一場論) 是許多人夢寐以求的終極理論.

- 眾多嘗試所需的數學模型已不再存在. 最著名者如費因曼的路徑積分. 這個理論必須在無窮維度的路徑空間中進行積分. 至今數學上仍然無法嚴格建構這種理論, 但是它已經被物理學家使用了數十年, 並且有著不能撼動的地位.

- 弦論 (string theory) 是一個企圖統一所有已知基本作用力的物理理論. 弦論經歷了幾次的改革之後, 在 80 年代初成熟. 在包含 Witten 等人的努力下, 不少人認爲終極理論 (theory of everything) 已經找到.

- 然而由於弦論運用巨大且艱深的數學工具, 其涉及的物理量也無法透過實驗量測, 因此更多物理學家不相信弦論, 視之爲一個艱難的數學遊戲.

- 但事實上弦論企圖使用更多缺乏嚴格基礎的數學論證, 因此多數數學家也不能接受弦論.

- 80 年代是一個奇妙的年代. 幾個事件扭轉了數學與物理之間的關係.

- 首先英國數學家 Donaldson 利用規範場論中 Yang-Mills 方程式的解空間的初等拓樸性質得到了幾何學中四維度空間結構的重大突破. 這是物理思想透過嚴格數學回饋高等數學研究的首例.

- 在當時許多數學家仍以為這僅僅是一個偶然的特例.

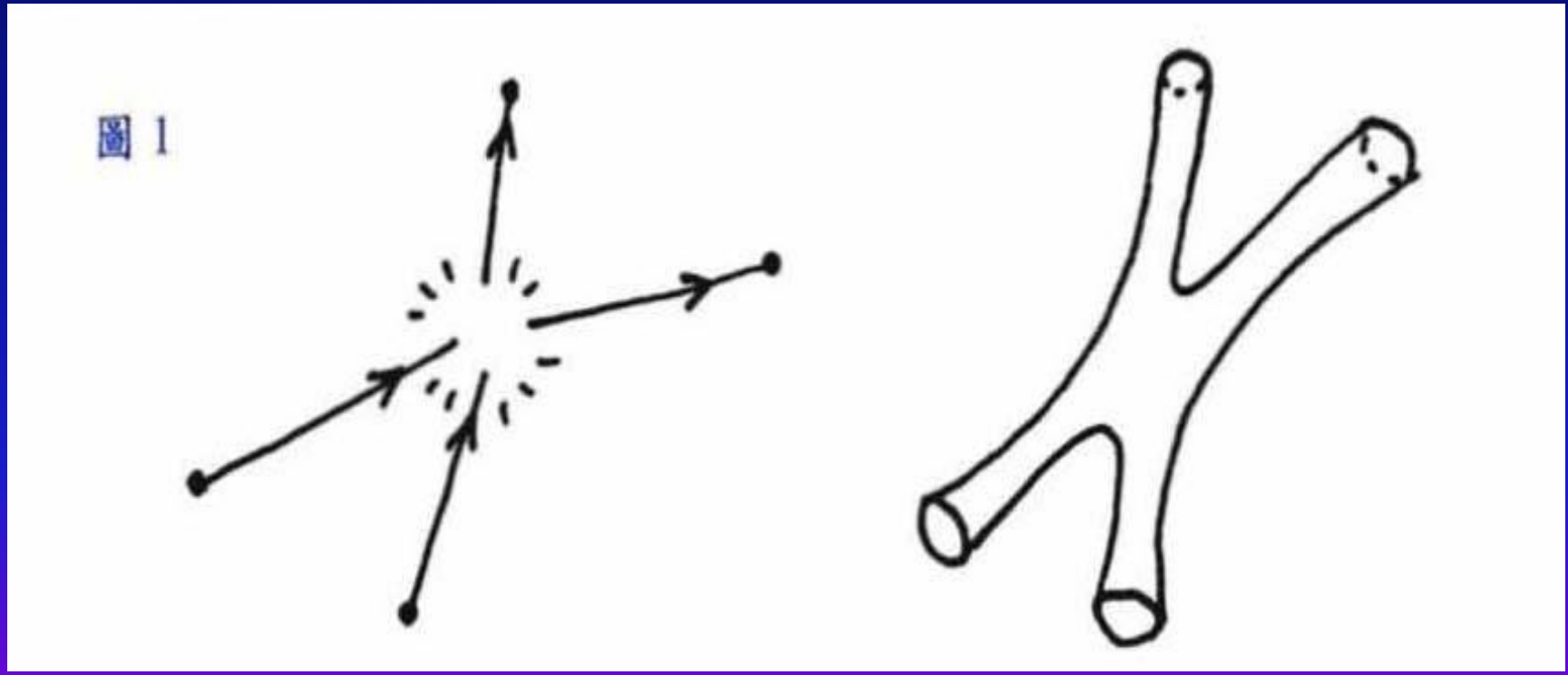
- 但更大的衝擊則來自稍後在弦論中所推測出的 Calabi-Yau 流形與其模空間的結構問題與鏡對稱 (mirror symmetry) 現象. 這一個火花開啓了歷史新頁, 最尖端的數學研究與弦論的研究相輔相成, 數學與物理再一次尋回共通語言.

- 以下筆者將從幾何學的觀點介紹 20 年來關於此的一些進展與筆者近年來相關的研究工作.

2. 幾何觀點下的弦論

- 20 世紀中頁以來許多基本粒子被相繼發現. 弦論認爲, 粒子其實是由弦 (一條線段或圓圈) 所構成.
- 弦的各種不同的震動形式決定了其在古典觀測下不同的粒子行爲.
- 粒子在時空裏運動的軌跡在弦論中變成了二維的曲面 (世界面, world sheet).

- 這個模型自然地克服了一些奇異點的困擾. 例如粒子的碰撞在弦論裏變成是一個光滑變動的過程.

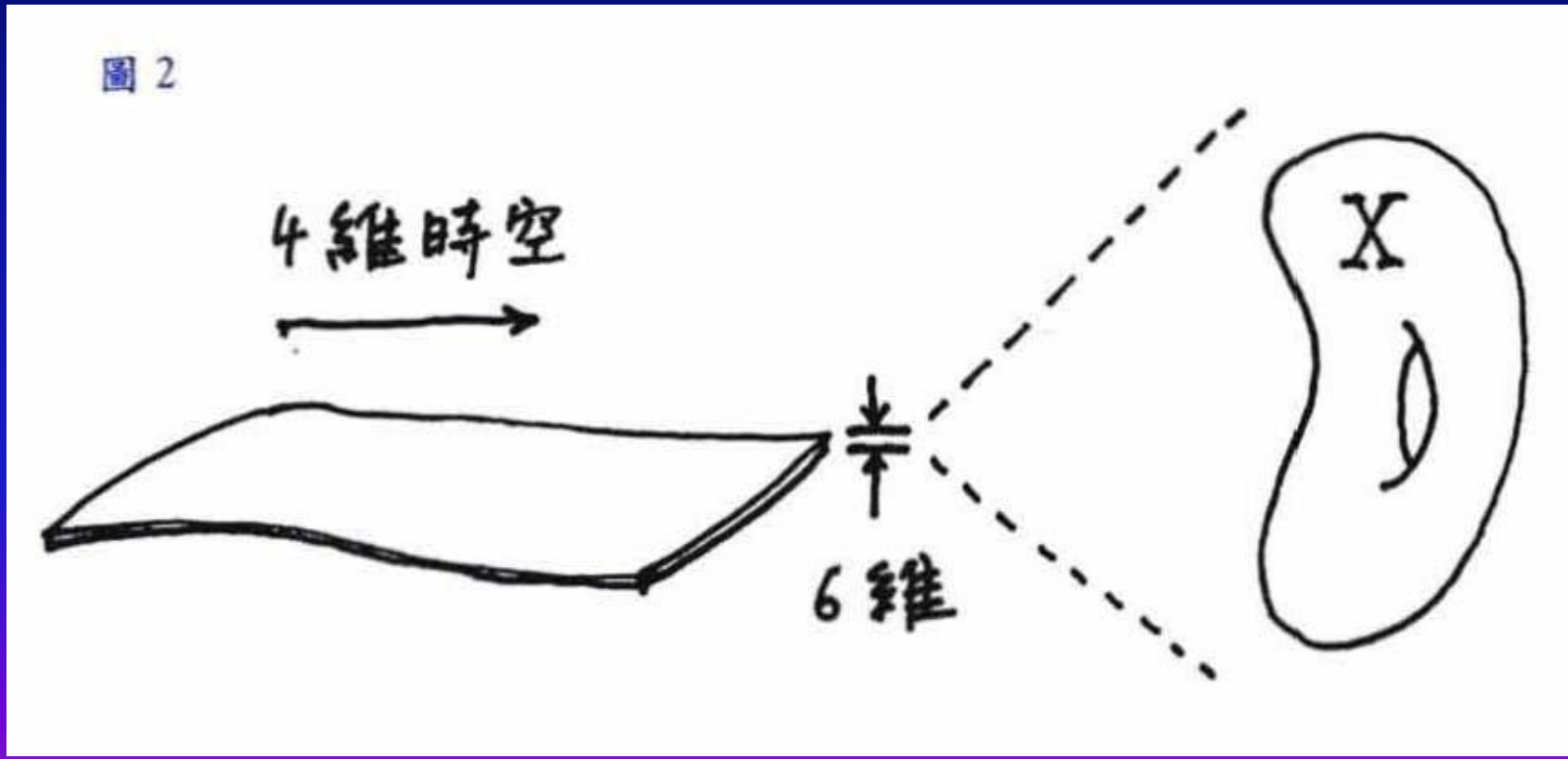


D = 26, 10, or 4?

- 然而, 弦論斷言時空必須是 26 維, 而非熟知的 4 維. 這預測了外在維度以及一種或數種逼近古典極限的過程 (所謂緊致化) 的存在性.

- 早在 80 年代已知至少有 5 種弦論以及數種相對應的緊緻化理論. 其中一種稱爲 heterotic 理論是此處所欲闡述的對象. 這個理論包含特殊李群 $E_8 \times E_8$ 的 16 維規範群, 因此時空可以建構在 $10 = 26 - 16$ 維的模型上.

- 對於這多出來的 6 = 10 - 4 維, 它形成一個捲曲在極小尺度的彎曲流形 X, 以至於在正常相對論時空的尺度之下人們感受不到其存在.



Quantum effects

- 但是 X 在小尺度之下, 其量子效應便趨於顯著. 這些量子現象經由物理推論, 其衍生的量可以通過幾何學給予精確的數學描述.

- 這使得雖然我們尚無法設計實驗驗證弦論, 數學家卻可能透過數學證明來取代實驗, 進行驗證!

Calabi-Yau manifolds

- 一般而言, 從 10 維到 4 維的緊緻化所依賴的 6 維流形 X 上具有一個黎曼度量 g, 使得它成爲真空狀態下 (廣義的) 愛因斯坦方程的解, 即其 Ricci 曲率恆爲零. 這些所有的 Ricci 平坦解 g 即構成了弦論的模空間 M(g).

- Heterotic 弦論是具有兩個超對稱的 – 保角不變量子場論 (N = 2 super-symmetric conformal field theory).

- 它的第一個主要推論是流形 X 具有複結構 J, 並且其 Ricci 平坦度量 g 與複結構相容. 這樣的複流形的一般構造方法必須透過 Yau (丘成桐) 在 1976 年關於 Calabi 猜想的解答才能獲得, 因此 (X, J, g) 被稱爲 Calabi-Yau 流形.

Which one?

- 然而, 這樣的流形有很多, 而弦論並沒有進一步闡明哪一個才是用來刻劃我們的世界.

- 既然沒有任何一個數學模型優於另一個, 一個自然而大膽的猜測是任何一個 Calabi-Yau 流形應該都可以適用, 因此他們所對應的量子場論應該都是等價的!

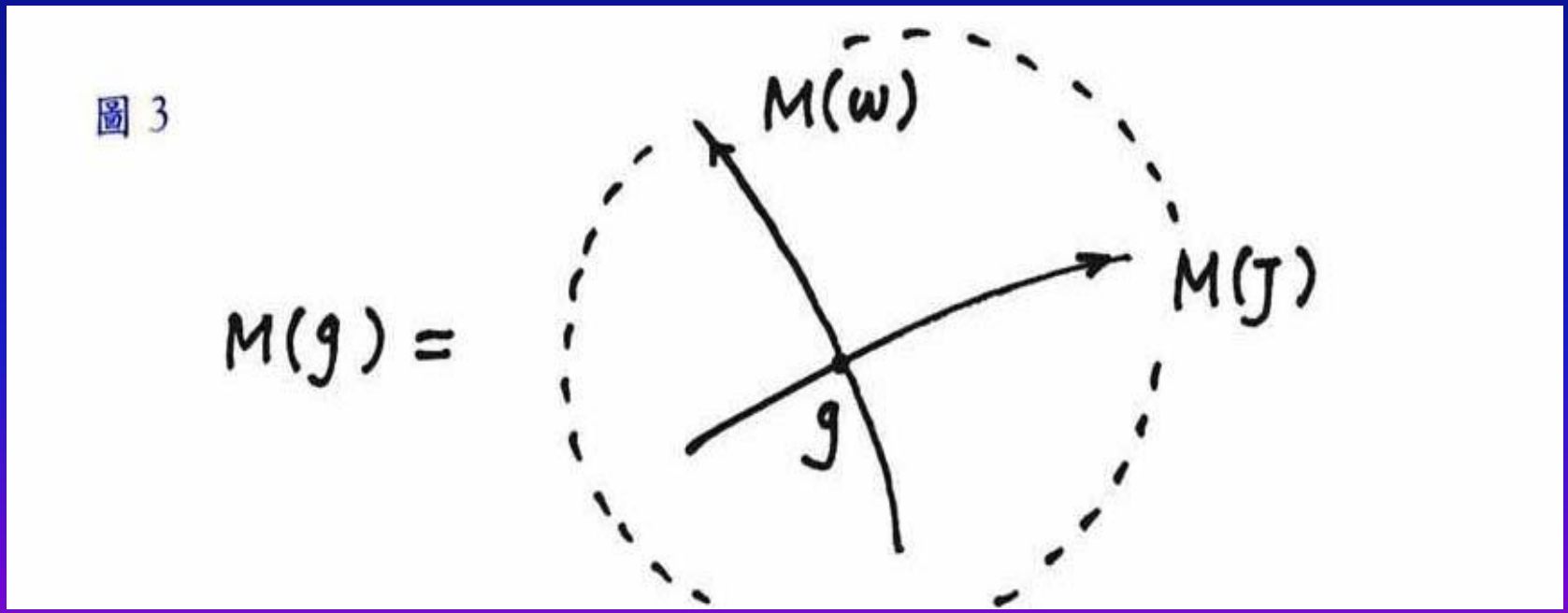
- 毫無疑問地, 這樣的臆測立即導致疑惑, 例如相異 Calabi-Yau 流形的拓樸形狀可大不相同. 故其合理性與正確性仍然需要更多的證據來支持.

Local structure of moduli

- 爲此, 我們需要引入一些幾何概念: 對複流形 X, 透過 J, 黎曼度量 g 可以唯一對應一個辛結構 w (一個封閉的二次微分形式: dw = 0, w 又稱 Kaehler 度量).

- 而 Yau 的定理證明了每一個辛結構 w 的拓樸類 [w] (cohomology class of w) 均唯一對應一個 Ricci 平坦度量 g.

- 因此一般而言 g 和 (J, [w]) 有局部的一一對應關係, 且模空間 M(g) 可以局部拆解爲一個乘積空間 M(J) x M(w), 其中 M(J) 爲流形 X 複結構的模空間, 而 M(w) 爲其 Kaehler class 的模空間.



Hilbert spaces

- M(J) 的切空間可由向量空間 $H^1(X, T)$ 表示, 而 M(w) 的切空間爲向量空間 $H^1(X, T^*)$, 其中 T 爲複流形 X 的全純切向量叢.

- 這些向量空間以及其相關的 Dolbeault 上同調群構成了這個量子理論的希爾伯特狀態空間 H = H(X) (the Hilbert space of states), 而其中的元素稱爲場 (fields).

- 根據複流形的數學理論, 每一個場均可以表達成 X 上的一個張量場.

3. 鏡對稱

- Super charge: 若將 heterotic 理論的 N = 2 超對稱算子代數 u(1) x u(1) 的生成元素記為 (Q, Q'), 則前述二向量空間恰為特徵值 (1, 1) 與 (−1, 1) 的特徵空間.

- 由於 Q 和 Q' 的選取可以差一個正負號, 因此我們也可以選 (−Q, Q') 作為生成元.

- 關鍵: 當我們利用 Calabi-Yau 流形 X 來構造 H(X), 這個操作將上述兩個特徵空間互相交換. 然而, 這個交換過的空間應仍是形如 H(Y), 其中 Y 是另一個 Calabi-Yau 流形.

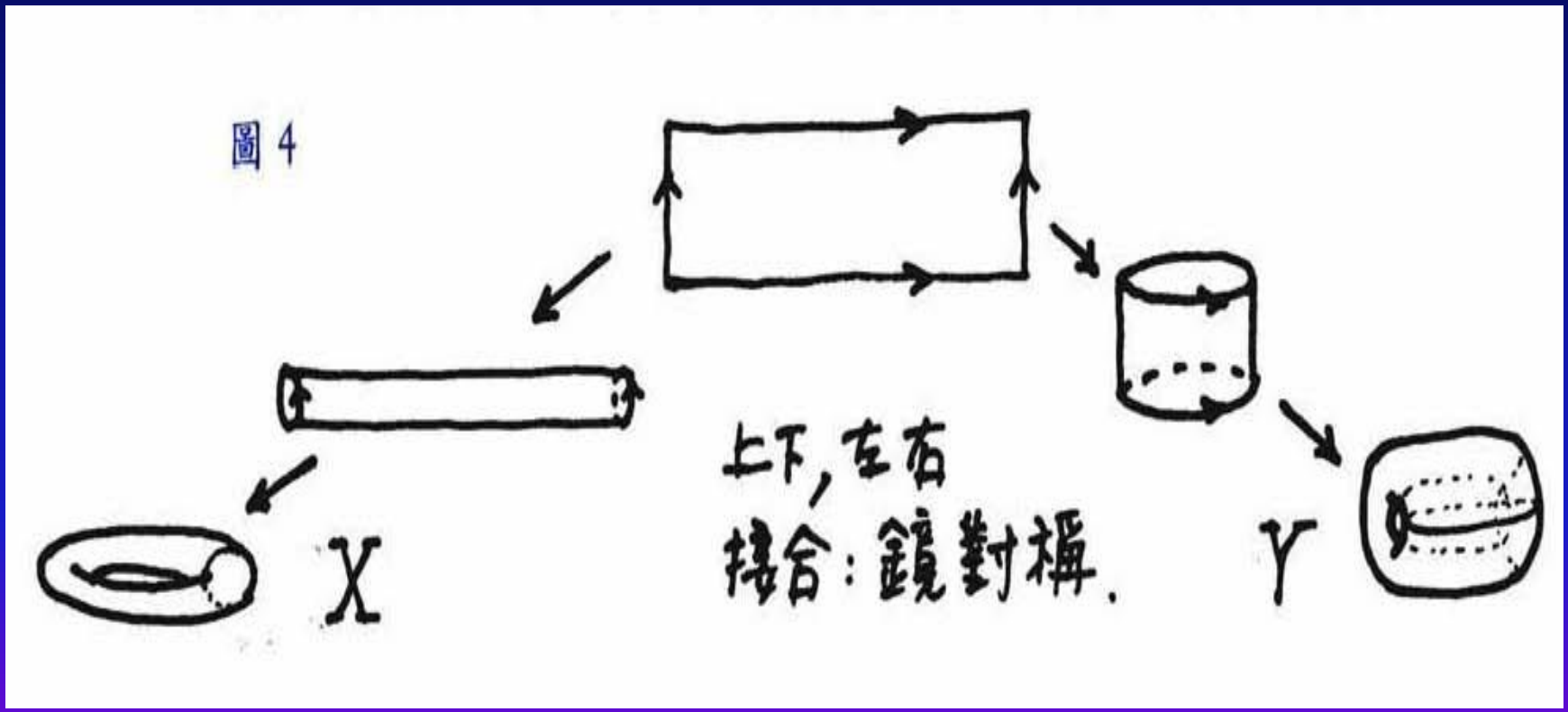
Exchanging moduli

- 因此我們將有

$$H^1(Y, T) = H^1(X, T^*),$$
$$H^1(Y, T^*) = H^1(X, T).$$

- 由於 X 和 Y 決定相同的量子場論, 可以預期某種程度上 X 和 Y 互換其 M(J) 與 M(w). 我們稱這個關係爲鏡對稱, 而稱 Y 爲 X 的鏡像流形 (mirror manifold).

Mirror symmetry



Correlations

- 希爾伯特空間 H 儘涉及場的種類與數量, 完整的量子理論尚需涵蓋場 a, b, c, ... 之間的交互作用函數 (correlation functions)

$$\langle a, b, c, \ldots \rangle.$$

- 其中函數的變數是弦論模空間的參數.

- 當這些參數受到某種限制則稱為 twisted theory.

From SCFT to AG

- 根據費因曼的路徑積分原理, 交互作用可以表示成所有弦的可能路徑 (world sheets) 上的加權積分, 而每一路徑的權重依賴於一個作用泛函 (action functional). 如前所述, 這個無窮維度的積分 (Lagrangian) 至今仍缺乏數學的嚴格定義.

- 然而對於保角不變的場論, 利用局部化原理, 弦論學家可以將積分 (至少在 twisted theories 之下) 化簡爲有限維度模空間上的問題. 這使得問題得以透過嚴格的代數幾何來呈現.

A = Gromov-Witten theory

- 例如對於 heterotic 理論, 有所謂 A-模型 (固定 J, 變動 [w]) 與 B-模型 (固定 [w], 變動 J) 兩種 twisted 理論.

- 在 A-模型裏, 交互作用函數變成黎曼面模空間上子空間的相交理論 (intersection theory in the moduli of holomorphic maps from Riemann surfaces of genus g to X), 現在通稱爲 Gromov-Witten 不變量.

- 這類問題在數學上稱做 enumerative geometry, 並且已有百年的歷史. 留下許多未解的難題.

Quantum ring

- 在 1990 之前, 代數幾何學家尚未找到解決此類問題的系統方法. 在古典的極限情形, 交互作用退化成代數拓樸中 X 的子流形間的相交理論 (X 的上同調環 H*(X)).

- 在 A-模型裏, Vafa 發現透過所謂的 WDVV 方程, 所有 (虧格爲零, genus g = 0) 的交互作用函數 (含量子修正項) 給出了 H*(X) 一個新的量子環 (big quantum cohomology ring) 的結構.

B = Kodaira-Spencer theory

- 在 B-模型裏, 交互作用面數在弦論中稱做 Yukawa coupling, (至少在虧格為零的部分) 它可以透過代數幾何中的 Kodaira-Spencer 理論來計算.

- 更具體而言, 它滿足 Hodge 結構的變分理論中 (the theory of variations of Hodge structures) 的 Picard-Fuchs 方程式, 因此可以透過古典的微分方程理論求解.

A(X) = B(Y)

- 如果 X 和 Y 互爲鏡像流形, 鏡對稱的驚人推論在於其交換兩者的 A-模型與 B-模型.

- 也就是說, X 上難以計算的量子環, 可以轉化爲 Y 上容易計算的 Picard-Fuchs 方程的解!

Candelas formula

- 當然, 給定一個 Calabi-Yau 流形 X, 鏡對稱推測其鏡像流形 Y 存在, 卻沒有說明如何去構造 Y.

- 第一個具體實現的構造方法是 Greene 和 Plesser 在 1990 提出的關於 4 維射影空間中 5 次多項式的零根所定義的 Calabi-Yau 流形 X 的 orbit-fold 構造法.

- 根據鏡對稱, Candelas, de la Ossa, Green 和 Parkes 等物理學家於 1991 利用這個構造出來的 Y 推導出 X 上所有虧格為零的 enumerative 不變量的公式.

Mirror conjecture

- 這些公式在數學上只能稱之爲猜想 (conjectures), 但是這種猜測的能力在當時完全無法由數學內部產生. 數學家開始重新思考大自然帶來的啓示. 對於弦論學家, 他們雖然對其推論深信不疑, 卻也期盼這些推論能夠獲得嚴密數學的驗證.

- 經過多人的努力, 這個所謂的鏡對稱猜想 (mirror conjecture) 終爲 Givental 與 Lian-Liu-Yau 於 1996 前後找到嚴格的數學方法所解決. 這項成就也爲弦論做出了第一個關鍵性的數學驗證.

Duality

- 關於鏡像流形 Y 一般的構造方法, 在 90 年代 Batyrev 推廣了 orbit-fold 構造法, 找到了一種環面幾何中 (toric geometry) 對偶多面體 (reflexive polytope) 的組合構造法.

- 但是真正的突破是 Strominger-Yau-Zaslow 利用 T-對偶 (T-duality) 於 1996 提出的幾何構造.

- 對偶 (duality) 是弦理論在 90 年代最重要的方向. 如前述的已知 5 種弦理論均可以在對偶的意義下視爲同一種理論, 即所謂 Witten 的 M 理論.

SYZ conjecture

- SYZ 斷言複 3 維 Calabi-Yau 流形 X 均有一個分布於三維球面上的纖維化, 使其一般的纖維爲特殊的 3 維 Lagrange 環面.
- 而 Y 則來自於這個纖維化的對偶纖維叢.
- 這個方向是現在 Calabi-Yau 流形的研究中最熱門的核心方向.

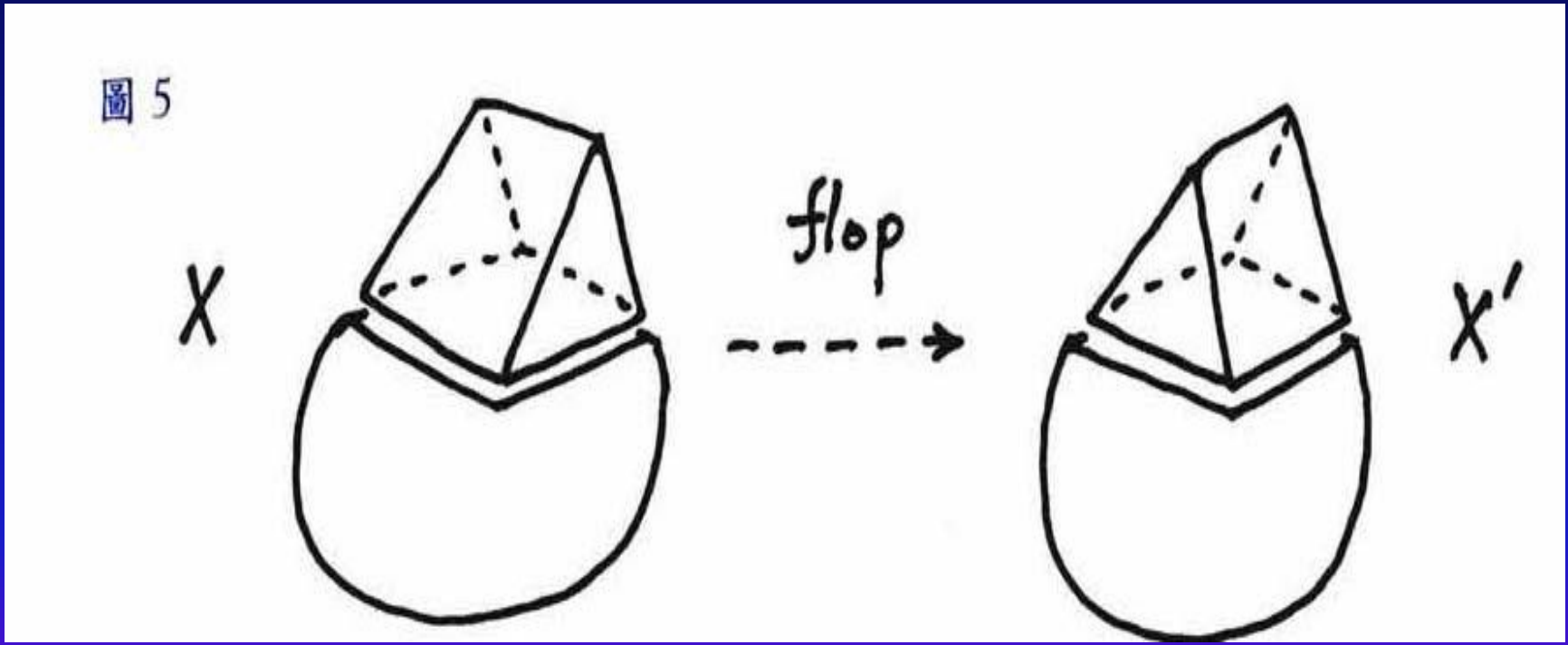
4. K 等價關係與 flops

- Heterotic 弦論中有一個比鏡對稱更基本的觀察可以和代數幾何產生深刻的聯結: 如果作為緊緻化的 Calabi-Yau 流形 X 和 X' 僅僅相差一個侷限在子空間的小範圍變化, 則他們之間的量子理論應如何對應呢?

- Type I: Birational case. 在代數幾何學的語言裏, X 和 X' 是一組複 3 維的雙有理極小模型 (birational minimal models).

- Kollar 和 Mori 在 1990 證明了 X 可以通過一系列稱做 flops 的基本空間手術 (surgery) 變化至 X', 這個過程並可以保持兩者的複結構模空間 M(J) 與古典拓樸上同調群. 因此, X 和 X' 具有完全相同的 B-模型, 以及 A-模型中一樣多的場.

Type I: Flops



Invariance of QH

- 但是很容易發現其古典上同調環的乘法結構並不保持. 因此合理的推論應是, 加上量子修正項之後, X 和 X' 有相等的 A-模型與量子環.

- 然而, 這個相等並不能在傳統的函數意義之下達成. Witten 於 1992 首先注意到在 A-模型模空間 M(w) 引入解析延拓的必要性.

- 這個推論在 3 維時, 於 2000 為 Li-Ruan 所證明. 因此筆者感興趣的是更高維度的情形, 以及 Type II: Extremal transitions. (今天只討論高維度 Type I.)

Minimal model program

- 高維度代數幾何學的核心理論無疑是 Mori 在 1982 年提出的極小模型理論 (MMP). Mori在 1988 年完成三維空間的 MMP. 然而, 極小模型在更高維度的存在性與不唯一性一直是一個大問題.

- 最近 Hacon 與 McKernan 結合了 Siu (蕭蔭堂) 與 Shokurov 的工作, 對於存在性取得了重要的進展.

- 最近 Kawamata 證明了雙有理極小模型間均可以透過 flops 來連結. 但是一般的高維度 flop 十分複雜, 不易理解.

Ordinary flops

- 另一方面, 筆者在 1998 提出了 K 等價關係, 企圖理解極小模型的不唯一性. K 等價是 flops 的推廣, 其將 Calabi-Yau 流形與極小模型的雙有理幾何研究放寬到一般的情況.

- 從幾何的本質來看毫無可能對高維度一般的 flops 做分類, 因此筆者捨棄了傳統的 MMP, 而嘗試在允許辛結構的擾動 (symplectic deformations) 之下, 看是否能將 K 等價關係分解成可以理解與計算的平凡手術 (ordinary flops).

- 在 3 維這是已知的結果, 也是 Li-Ruan 為何能驗證 A-模型相等的基礎. 只可惜這個分解定理目前的唯一證明尚需依賴 MMP 與 3 維奇異點的分類, 無法推廣至一般的維度.

Earlier works

- 推廣前述 Kollar 在 3 維的結果, 筆者曾於 2000 前後證明拓樸群的 Betti 與 Hodge 數在 K 等價之下保持不變, 並且找到了所有在 K 等價之下保持不變的曲率積分 (curvature integrals).

- 曲率積分也就是著名的 Chern numbers (陳省身示性數, 如 Euler 數 = Gauss-Bonnet 積分). 結論是這些不變積分正是所謂的複橢圓虧格 (complex elliptic genera). 它們可以被解釋為路徑空間 (loop space) 上 Dirac 算子的 index.

Topological evidence

- 這個結果對 研究 Ricci 曲率相近的流形之間的關係有重要的應用. 譬如他們之間應可透過一系列的平凡手術將其中一個空間變化至另一個空間.

- 在允許將複共邊界 (complex cobordant) 流形視爲等價的關係下, 上述結果可用於驗證此一猜想. 這個結論給予不唯一性問題在所有維度之下一個拓樸的部分解決.

- 當前的難題是要將複共邊界提升到辛結構的擾動.

5. 量子環的不變性 (LLW 2007)

- K 等價流形雖保有相同的拓樸群, 其乘法環結構卻無法保持. 在平凡手術之下, 其拓樸差項 (topological defect) 在 2004 年初被筆者與林憲雯所完全決定. 隨即我們推廣了 Lian-Liu-Yau 在 1996 年研究鏡對稱中所發展的理論, 證明了小量子同調環 (small quantum ring) 的不變性.

- 更確切來說, 古典同調環的乘法誤差項被 Mori 的 extremal 射線上對應的量子修正項所修補. 我們最主要的結果是完全決定了關於 3 個點 (3 fields) 的交互作用函數, 我們稱之為一般化的覆蓋公式 (generalized multiple cover formula). 這個成果將 Witten 在 1992 年的觀察從三維空間推廣到所有的維度.

Analytic continuations

- 注意到, n 點交互作用函數在 X 和其 flop 後的流形 X' 上是分別定義於他們自己的 Kaehler cone 上的解析函數, 而不變性表示他們是彼此的解析延拓. 這是高維度代數幾何學中一個全新的現象.

- 關於整個量子環的不變性還需要處理兩個問題.
- (1) 非 extremal 射線的討論.
- (2) 大量子環 (big quantum ring), 即 4 點以上的交互作用函數.

- 在 2005 下半年, 在與國家理論科學研究中心訪問學者李元斌 (Y.-P. Lee, Utah) 的研討中, 透過他和 Pandharipande 在 stable maps 模空間上的除子關係 (divisor relation), 我們找到前述覆蓋公式的新證明, 把 3 個場的交互作用函數的計算逐步降回到 1 個場的重力衍生作用函數的計算 (1 point gravitational descendents). 這個新方法也使我們的定理在大量子同調環的不變性上得以擴展.

- 在 2005 年初, 我們已經開始嘗試結合 Y. Ruan 與 J. Li 關於 Gromov-Witten 不變量的退化公式 (degeneration formula) 把問題化簡到局部模型的計算 (某一種射影纖維叢).

2001 – 2004 – 2006

- 在 2006 年初, 我們終於在局部模型的情況下取得完整的突破. 我們的證明要利用一個關於解析延拓與函數方程式 (functional equations) 的 5 層數學歸納法.

- 稍後於 4 月間我們克服將問題從一般情況簡化到局部模型過程中的所有細節問題, 因此完全解決在任何維度的簡單平凡手術之下的大量子同調環的不變性問題.

- 這是近年來 Gromov-Witten 理論最主要的結果之一. 也是 K 等價理論研究的一個新的里程碑. 這個工作於 2007 年初被數學年鑑 (Annals of Mathematics) 所接受刊登.

Recent works at CMTP

- With Baohua Fu (U. Nantes, visited CMTP in April 2007):

  [2] Motivic and quantum invariance under stratified Mukai flops. J. Differential Geometry 80, 2008.

- With Y.-P. Lee (U. Utah, visited CMTP in November 2007 and May 2008) and H.-W. Lin:

  [3] Invariance of Gromov-Witten theory under simple flops, submitted. Preprint 2008, arXiv: 0804.3816.

6. 結語

- 本文利用代數幾何與 heterotic 弦論的交互影響, 企圖指出部分的數學與物理正走在一條共通的大道上.
- 事實上在應用的範疇裏, 數學與物理以至於其他科學從未停止彼此之間的合作, 數學在許多角落也逐漸扮演了關鍵的角色.
- 只是在尖端理論研究的方向上, 在 20 世紀中的某一段長時期主流數學確曾與其他科學分流, 各自去面對其本質上的挑戰.

- 現在大自然重新給予數學研究大量的素材與思維. 相反地, 20 世紀裏數學依賴其自身內在思維所發展而出的抽象物件也竟然都在自然界中找到其扮演的角色.

- 嚴密的數學證明甚至取代實驗, 擔任起驗證自然定律的任務.

- 這樣的場景似乎將時空帶回了 20 世紀的初期. 我們可以樂觀地期待數學與科學在 21 世紀的水乳交融. 更多的驚奇正在前方等待著我們!

The end

Thank you!