

普通高級中學課程綱要「數學」Q&A

Q1：本次數學科綱要修訂之理念為何？

A1：

本次高中數學課綱之修訂理念，包括揭櫫數學為基礎學科的重要性，釐清高中數學核心內容的定位，以及提出導正高中數學學習文化的理想。

數學的基礎性：

數學是研究各種規律性所發展出的語言，是人類理性思維的產物，也是自然科學與社會科學的共同基礎；二十世紀計算機的發明，更促成當代各學科進行「數量化」與「數學化」的革命。因此，數學對學生未來的發展，將日益重要。基於各學科知識發展潮流，聯合國教科文組織亦將數學與語文列為終身學習的基礎，學生於高中時期奠定良好的數學基礎，對其個人及整體社會之發展均十分的重要。

核心的數學：

課程綱要之設計，應釐清數學的學習範疇。高中時期所應學習的數學，應是界定在由生活上的需要、或是其他學科的需要，所形成的核心內容；也應是大部分學生在循序漸進學習中，得以學會的基礎數學。

數學學習文化：

數學學習應注重數學思考的訓練，須導正「零碎解題技巧堆集」以及「不經慎思只求快速解答」的學習文化。解題固是數學訓練重要的一環，但應注意其意義與方法；題型的情境要合於常理，刁鑽人工化的難題則應予避免。

Q2：請說明代數、幾何、應用結合的設計精神為何？

A2：

圖像是直觀的物件，代數則是其抽象的表現，我們可以對它進行形式操作進而解決問題，並透過多種應用才會體認出它的一般性與普遍性。以函數主題為例，其幾何之面向是函數的圖形，其代數的面向是函數的各種形式操作，包括四則運算、平移、伸縮、變數變換、求極點等等。而其應用則可表現具體世界的兩量的關係。再以計數為例，集合之文氏圖、樹狀圖等為其圖像或幾何的部份，而計數原理為其代數的部分，這些自然都有廣泛的應用，其中之一是機率。再以直線單元為例，直線為其幾何圖像，二元一次方程式為其代數表現，線性規劃課題則為其應用。

總之，數學的學習應把握抽象與具體結合、圖像與符號結合，而廣泛的應用正反映了數學的普遍性與本質性。

Q3：綱要調整主要的原則為何？

A3：

本課綱調整的原則包括一貫性、銜接性、連結性、妥適性、國際性：

(一)一貫性：

為了學習的一貫性，本課綱配合九年一貫，掌握幾個主題，包括：「數與量」、「代數」、「幾何」、「函數」、「機率與統計」，於高中階段持續鋪陳發展。舉例來說，高一上定位為「連續量」相關課題之學習，包括度量連續量所產生出之「實數」，以及描述量與量關係之「基本函數」（包括多項式函數與指對數函數）。高一下則處理「離散量」相關的課題，包括「數列與級數」、「數據分析」，以及生活中的「排列組合」與「古典機率」問題。而上述量化分析的相關主題，皆於高一完成，將作為高中其他學科之計量分析的共同基礎。自高二起的學習，則以「幾何」為主，包括「坐標幾何」與「向量幾何」，此為國小、國中階段的「操作幾何」、「推理幾何」之延續。

(二)銜接性：

為了學生學習經驗之累積，各主題與國中數學之相關主題均要有複習、延伸、及再發展新觀念的歷程。舉例來說，在「數與式」中，先複習國中「有理數」的觀念，並延伸到「循環小數」，再發展到「實數」的新觀念。同樣的，在「多項式函數」的課題裡，先複習「一次函數」、「二次函數」，次作較完整之延伸（包括：斜率與變化率、配方法、極值、圖形等），再發展到「一般多項式」，並應用到一次與二次的「插值多項式」。

(三)連結性：

為了避免數學學習成為零碎技巧的累積，課綱設計要注意數學內部各單元間的連結，以及數學與外部的連結（包括：數學與生活的連結、以及數學與其他學科的連結等），也就是要加強數學的應用。

(四)妥適性：

為了學習的有效，本課綱特別注意各主題內容是否為必要、章節位置是否妥適、學習速度是否妥當。舉例來說，有限制條件下之「極值問題」可在大學中以微積分有效處理，在高中時過度以「柯西不等式」處理，則無必要；又如「輾轉相除法」之理論，與其他學科沒有直接關聯且非整體結構之所必須，亦不需要強求所有學生都學習；在「排列組合」單元，傳統教學中有許多刁鑽的難題，在真實生活中不會出現，在國外的正式教材中也很少納入，對學生學習也造成障礙，相關內容建議刪除。在章節位置是否妥適方面，例如「數據分析」之課題，為許多學科之數量化分析的共同基礎，以往安排在高二下學習，似嫌太晚，故在兼顧結構的完整性下，調整於高一下學習。再以學習的速度而言，「三角與三角函數」、「複數的極式」等課題，過去被安排在高一下以兩個月的時間學完，對許多學生而言在短時間內不易消化，新課綱中則設計為二階段的學習，使其學習速度較為和緩。

(五) 國際性：

本課綱之修訂特別注意國際上數學科學發展之潮流、以及數學教育發展之趨勢。例如，計算機之發展，促成許多學科數量化的革命，因此「數據分析」及數學的應用，對今日的學子格外重要。又如，「函數」是表現自然與社會現象中「量與量關係」的語言，在當代國際數學教育中特別重視，因此在修訂課綱中，將其列為與「代數」、「幾何」同等地位之主題，由高一起一貫鋪陳，有系統的學習，並銜接至大學的微積分。

Q3-1：修訂課綱時是否有考慮到國高中銜接的問題？是否有考慮到各學科課程之間互相依賴的問題？

A3-1：

(一)99 課綱修訂分兩階段，一為前置研究階段，二為修訂階段。縱向銜接問題與橫向學科互相依賴問題在前置研究階段已作審慎處理：

1. 進行「中小學數學科課程綱要評估與發展研究」：

時間自 94 年 1 月至 6 月。橫向方面進行六個國家數學課綱的比較，包括美國加州、新加坡、英國、日本、韓國、中國等國家。縱向方面則進行九年一貫課程之銜接性、一貫性、妥適性與連結性之研究。完成「中小學數學科課程綱要評估與發展研究」報告並通過審查。報告書可於高中數學學科中心網站下載：<http://mathcenter.ck.tp.edu.tw>。

2. 建置「12、15、18 歲數學科能力指標」：

時間自 94 年 12 月至 95 年 4 月。經過多次專案小組會議，並在 95 年 2 月 15、16、17 日分別在北、中、南召開公聽會。完成「12、15、18 歲數學科能力指標」。相關報告與公聽會紀錄置於：<http://140.116.223.225/98course/>。

3. 進行跨學科的檢視：

95 年 8 月、9 月參與普通高級中學課程各科暫行綱要跨學科(領域)整合研討會，釐出數學與其他學科之關聯，並整理各學科學習上需要數學的課題與需求該課題知識的時間。相關資料置於：<http://140.116.223.225/98course/>

(二)銜接性是修訂課綱的重要原則之一。為了學生學習經驗之累積，各主題與國中數學之相關主題均要有複習、延伸、及再發展新觀念的歷程。舉例來說，在「數與式」中，先複習國中「有理數」的觀念，並延伸到「循環小數」，再發展到「實數」的新觀念。同樣的，在「多項式函數」的課題裡，先複習「一次函數」、「二次函數」，次作較完整之延伸（包括：斜率與變化率、配方法、極值、圖形等），再發展到「一般多項式」，並應用到一次與二次的「插值多項式」。

Q4：高中數學各年級的定位為何？

A4：

各年級數學之定位如下：

高一數學（數學 I, II）定位為與生活關聯或其他學科需要用到的數學，以建立學生在各學科進行量化分析所需要的基礎。高一上處理連續量相關的課題，包括由度量連續量所產生出之實數、描述量與量關係的基本函數，如多項式函數與指數函數。高一下處理離散量相關問題，包括數列與級數、排列組合，以及生活中所常見的古典機率及其他學科所常用到的數據分析相關的問題。

高二數學（數學 III, IV）的定位為社會組與自然組的學生所應必備之數學知識，其主題為坐標與向量幾何以及線性代數。但由於要顧及一般的學生，部分內容並加註◎號，列為選修數學。

高三數學（數學甲 I, II、乙 I, II）屬選修，部分定位為統整深化，部分定位為大學的微積分與機率統計的先備課程。

Q5：數學科課程分版如何做？

A5：

- (一)數學是工具學科，在高一高二時，所有學生所需之數學大致相同，因此其分版的設計是在高一下時，有四個小節（三階行列式的定義與性質、空間中點到直線的距離與兩平行線的距離及兩歪斜線的距離、三平面幾何關係的代數判定、平面上的線性映射與二階方陣）以加註◎號方式區隔，作為進階學習之用。由於此部分份量不多，對於學生在高三時選擇組別，影響不大。
- (二)課程分版主要目的是要讓學生能得到適才適性的學習機會，此部份以選修方式來設計：對基礎不好的學生，提供基礎數學 I、II，補強其國中數學能力，並作為與高中數學的銜接；對學習速度快的學生，各校也可提供微積分 I、II 供其選修，或允許學生至大學選修。
- (三)現行各版本教科書的作法是將 AB 版放在同一本書，B 版的內容會作記號，而且 B 版只出現在第 4 冊。
- (四)大學入學考試學測部分只測驗 A 版內容。數學甲指考範圍涵蓋 B 版全部內容（「三階行列式的定義與性質」、「點到直線的距離、兩平行線的距離、兩歪斜線的距離」、「三平面幾何關係的代數判定」、「平面上的線性變換與二階方陣」），數學乙指考範圍包含 B 版部分內容（「三階行列式的定義與性質」、「點到直線的距離、兩平行線的距離、兩歪斜線的距離」），詳情請參見大學入學考試中心所公布的各考科命題方向。

Q6：為何要變動 95 課綱數學科的順序？

A6：

順序變動最主要的部分有兩項：一是原高一下之三角拆成兩階段學習，二是原高一下內容移到高一下，理由如下：

- (一)原高一下之三角題材份量太重，造成許多學生學習困難。
- (二)高一數學（數學 I, II）定位為與生活關聯或其他學科需要用到的數學，以建立學生在各學科進行量化分析所需要的基礎。高一上處理連續量相關的課題，包括由度量連續量所產生出之實數、描述量與量關係的基本函數，如多項式函數與指對數函數。高一下處理離散量相關課題，包括數列與級數、排列組合，以及生活中所常見的古典機率及其他學科所常用到的數據分析相關的課題。希望藉由這樣的安排，學生的數學學習能與其九年一貫的數學銜接，並與其生活經驗結合，以提升其整體的量化分析與理性思考的能力。
- (三)數學 II 自成一個體系，且所涉及的先備知識已於國中完成，因此不會發生因變動順序而產生的邏輯錯亂的教學問題。

Q7：三角與三角函數為何要切割為兩段學習？

A7：

- (一)目前「三角」與「三角函數」置於高一下學期一次教完，此種安排對大多數學生的學習造成困難。不論從知識的結構、學習心理、或從應用的角度來看，「三角學」中的正餘弦定理應與「向量幾何」的內外積、行列式作緊密的連結；而「三角函數」之主題則強調其週期函數、弧度等意涵，與圓周運動、波動現象、複數的極式等課題關係密切，而這些題材需要較高的數學成熟度，因此適合放在高三的選修數學中學習。本課綱將「三角」與「三角函數」分二階段學習，主要是配合一般學生的學習成熟度，並與「三角」與「三角函數」之個別應用作緊密的結合。

Q7-1：有關第一階段的三角學習只涵蓋 \sin, \cos, \tan 不包括 \cot, \sec, \csc ，是否會將三角學習零碎化？

A7-1：

第一階段三角的學習主要是要與幾何的應用密切扣合，只需用到 \sin, \cos 與 \tan ，這樣子的安排可以讓幾何的學習去蕪存菁，脈絡清楚，日本教科書也採同樣的設計。如果在第一階段三角的學習增加 \cot, \sec 與 \csc 的題材，會增加無幾何意涵的三角恆等式的難題，並無必要。

Q8：此次課綱順序的調整是否會造成數學科與物理學習不能配合的問題？

A8：

- (一)此部分已與物理科課綱修訂小組協調過，高二第一個月數學科先上三角，會自然銜接到物理的二維運動（高一物理的運動學侷限在一維運動，並不需要用到三角）。向量的觀念則先在物理之靜力學做直觀介紹，而數

學科則繼續由幾何的角度切入，相互配合，並非單由數學科提供向量的所有背景知識。物理在高二時，應用到簡單的反三角函數，如 \tan^{-1} ，但只需要學生熟悉特殊角的直角三角形邊角關係即可，這部分的反三角函數學習由物理自行處理。

- (二)從課綱與教科書的內容來看，高一物理所需的數學工具皆已在之前的數學課程中學習過。但物理教師在教學現場的補充資料，可能有一些不必要的超前或過度延伸的內容，數學科不需要去配合這類不盡合理的需求，各學科在超綱部分應就其需要的部分由老師自行補充。
- (三)高二物理在某些單元所需的數學工具確實在數學課程中尚未出現，包含向量、極限、角的弧度制、正餘弦函數的圖形等，對於物理老師而言確實會多出一些負擔。但數學對物理或其他學科而言只是工具，通常是夠用即可，不需要學整套，建議仍然由物理老師先作初步與必要的介紹。此外，早期物理課程是高三才學習，近年物理課程提前到高二甚至高一學習，使得數學配合物理更加困難。
- (四)三角函數的疊合在高三時，數學和物理同時介紹。

Q9：數學甲的微積分是否有必要？很多學生在高中學了微積分到大學時以為已經學了微積分因此就不好好學，等到發現學習落後時已太晚，而且高中時數太少其實無法將微積分完整的教好，是否可以刪除高中的微積分？

A9：

多項式函數的微積分很淺，和大學微積分的內容差異很大。數學甲的定位是以簡單微積分的觀點統整多項式函數與立體幾何的學習，包括三次多項式函數的繪圖、牛頓求根法、以及球體積、錐體體積等問題。而且許多學科在大學一開始就已用到基本的微積分概念，如物理、經濟等，因此在高中時需要建立起一些基本概念。

Q10：數列放在第 2 冊，但第 1 冊第 3 章 5.3 就出現等比數列與等比級數，顯得突兀。新舊課綱將數列級數與指對數的教學順序對調，原因為何？既然指數成長要以等比數列為先備知識，為什麼不把數列與級數移到指對數之前？

A10：

- (一)我國的教學傳統較習慣塊狀課程設計，因此本課綱雖有一些內容採螺旋式設計，卻仍在教學與評量目標上切割清楚，以配合教科書編撰與教師授課的習慣。等比數列、等比級數在高一上時的指對數函數中以應用的形式自然出現，再到高一下時之數列與級數中深化。
- (二)第 1 冊的主題是函數，指對數函數是多項函數之外最簡單而生活化的實例。第 2 冊的主題是有限數學，為使各冊有其教學主軸，故將指對數函數與數列級數單元對調。
- (三)第 1 冊第 3 章建議只談指數成長的模型，也就是等比數列，至於等比級數可移至第 2 冊第 1 章再學習。

Q10-1:學習指對數時會談到等比與複利，同樣的問題在第 2 冊學習數列級數時又重講一次，影響學習效率。複利常被列入指對數的應用實例，但如果要求本利和，又缺少求和公式，是否要把等比級數的部分內容提前學習？

A10-1：

- (一) 第 1 冊第 3 章建議只談指數成長的模型，也就是等比數列，至於等比級數可移至第 2 冊第 1 章再學習。
- (二) 我國的教學傳統較習慣塊狀課程設計，因此本課綱雖有一些內容採螺旋式設計，卻仍在教學與評量目標上切割清楚，以配合教科書編撰與教師授課的習慣。等比數列、等比級數在高一上時的指對數函數中以應用的形式自然出現，再到高一下時之數列與級數中深化。而等比級數的求和問題，從數學 I 第一章開始，就以平方差和立方差的形式引入，到了第二章至少推廣到 $a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$ ，在第三章（指數函數）的應用問題中自然引進的有限項等比級數求和問題，則可以用上述經驗簡單介紹公式。這些經驗和公式，到了第二冊可以作為學習等比級數的動機和練習歸納法證明的範例。而無窮項等比級數，則在選修數學甲、乙 II 中，有了極限概念之後再學習。

Q11：國中教材基本上不談等差數列與等比數列，而高中課綱似乎也只是蜻蜓點水式地帶過，學生的學習會不會不夠紮實？

A11：

- (一) 學生在國中時期會學到等差數列。
- (二) 學生在高中時期會在會在數列與級數中之一階遞迴關係中完整學習等差、等比數列與級數。

Q12：「平面上的線性變換與二階方陣」難度很高，真的有必要讓高中生學習嗎？

A12：

平面上的線性變換是矩陣的重要應用，其內容並不比過去實驗本難。而且此部份加註◎號，屬於分版中的 B 級（進階）課程，並非所有學生都需學習。

Q12-1：矩陣線性變換曾出現在 88 課綱，在 95 課綱時被刪除，99 課綱又將其納入，請問原因為何？

A12-1：

- (一) 矩陣對自然與社會組學生未來的學習均很重要，而矩陣的應用包括轉移矩陣與平面上的線性變換。
- (二) 平面上的線性變換只談伸縮、旋轉、鏡射、推移等 4 種基本變換，但不談任意的平面線性變換皆可作基本分解，內容比 88 課綱淺易。

Q13：請說明數學科課程綱要與暫行綱要之差異

A13：

差異部分分為刪除、新增、強化、弱化、章節位置調整五項目，條列如下：

高中數學科課程綱要與 95 年課程綱要內容之差異		
異動	項目	理由
刪除	1.最高公因式、最低公倍式、多項式的輾轉相除法	經跨國比較，大多數國家未將此題材列為高中必修。
	2.環狀排列	並非必要之題材，且易發展出太難的題型。
	3.和差化積、積化和差	高中數學科、物理不涉及不同週期之三角函數的疊合，故無必要性，且易發展出太難的題型。
	4.二次曲線與直線的關係、圓錐曲線的光學性質	可在多變量微積分中學習，在高中處理較複雜，國際上亦弱化圓錐曲線之學習。
	5.球	可在多變量微積分中學習，在高中處理較複雜。
	6.交叉分析	涉及聯合機率與兩變元之函數概念，在高中不宜。
新增	1.隨機的意義	與國中的相對次數分布圖能結合，屬機率的基本概念，並能較清楚交待現有教材中之期望值、變異量，以及二項分布的概念。
	2.凹凸性	加強函數特徵的認識，但僅作直觀的介紹。
	3.外積	為清楚鋪陳三維體積公式之學習，並與正弦定理相結合，且目前高中已介紹其概念，只是未明確定義。
強化	1.分式的運算	作為有理函數的學習基礎，分式在生活中應用性高。
	2.三次以下插值多項式	應用性高，並可連結到「查表」之學習。目前插值多項式在高中例題中均已出現，此處僅增加名詞之定義。
	3.指數模型	加強數學與生活的連結。
	4.線性組合	調整分點公式之學習，強調線性組合（向量的分解與合成）之觀念也重要。
	5.函數的特徵與圖形的連結	函數表現具體世界的兩量關係，函數的學習應將其特徵、圖形與應用作緊密的結合。
	6.平移與伸縮、數據的標準化	數學中最基本的化簡方法。

高中數學科課程綱要與 95 年課程綱要內容之差異		
異動	項目	理由
弱化	1.一般底的對數操作（換底公式）	除了 2 與 10 為底的對數，一般底的對數在高中並無必要性。
	2.排列組合	情境不合理或太難的題型會降低學習效率。
	3.三角恆等式、三角方程式	複雜的三角恆等式、三角方程式在高中時無直接用途，且會降低學習效率。
	4.遞迴關係	二階以上遞迴關係在高中時較孤立，在大學的離散數學時候會學。
章節位置調整	1.原數學 IV 之排列組合與古典機率調整到數學 II	a.儘早提供學生在各學科進行量化分析所需要的數學基礎。 b.與生活關聯性較高，應較早學習，此題材對一般高中生均屬需要。 c.調整後不會發生邏輯順序錯置的教學問題。
	2.原選修數學 I 之條件機率、貝氏定理、相關係數、最小平方法調整到數學 II	同上。
	3.原數學 II 之三角與三角函數分別調整至數學 III 與數學 V	a.和緩學習坡度，讓學生有時間消化。 b.三角與坐標幾何及平面向量章節靠近，相關觀念較易緊密結合。 c.三角函數的學習包括圓的參數式、波動與複數的極式，都需要較成熟的數學觀念，放在高三列為選修較合適。
	4.原數學 I 中「含不等式之數學歸納法」及「無窮等比級數」，移至選修數學甲 II、乙 II 之極限章節	a.在極限章節時才會進行數列大小估計，此時才會用到含不等式的數學歸納法。 b.無窮等比級數涉及極限概念，移到極限章節較恰當。
	5.原數學 I 之直線移至數學 III	直線的函數概念「一次函數」保留在數學 I 函數章節中，但直線的幾何概念相關部分移至數學 III 之坐標幾何中，並與平面向量章節靠近，較易建立學生完整的坐標幾何概念。
	6.原選修數學 I 之線性規劃移至數學 III	學完直線方程式應有直接的應用，符合課綱之代數、幾何與應用緊密結合的精神。

高中數學科課程綱要與 95 年課程綱要內容之差異		
異動	項目	理由
	7.原選修數學 I 之矩陣調整至數學 IV	統一矩陣學習的章節，部分課題加註◎號列為選修。
	8.演算法（整數的輾轉相除法、二分逼近法）置於數學 II 附錄	a.整數的輾轉相除法與二分逼近法均屬原有題材，本綱要將其統合為演算法，但有別於過去的教學，此處強調可透過程式語言，在計算機上實現演算法。 b.計算機的發展凸顯了演算法的重要。 c.演算法置於附錄是要提供學生在資訊科技所需要用到的數學基礎。

Q14：傳統上排列組合、機率、統計都放在高二下，現在放到高一下，學生成熟度不足，學習是否會有困難？國外是否有類似的作法？

A14：

- (一)「排列組合」的定位為處理生活中常見的計數問題，並作為學習古典機率的準備，並不需特別的背景知識；過去在「排列組合」的教學上，常有許多刁鑽古怪的難題，有些是題型的情境不合常理，有些則是大學才需要學習，有些則是用到太多觀念（如「環狀排列」等），這類難題都應避免，以免詆損了學習效率。本課綱已刪除「環狀排列」，並設計基本題型範例，施行上應該沒有問題。
- (二)「機率」章節部份只有古典機率，只涉及計數與除法，學生學習上也應無問題。
- (三)「統計」部份只學習母體的數據分析，不涉及抽樣與極限的概念；在數據分析的「最小平方法」部分，採數據標準化後再進行迴歸直線的找尋，此一方法只涉及二次式的配方法，對一般高一學生之學習應無困難。
- (四)在國外的教材，此部分章節常放在「代數二」中，在高一或高二學習均可，詳見數學科學科中心網站上的高中課程數學科綱要評估報告。
- (五)99 學年度期間高一與高二在同一時間點學習排列組合，有些學校定期考高一與高二採用相同題目，結果高二表現不如高一。可能因素固然很多（例如高二有較多學生放棄數學），但排列組合的題目可以很靈活，若題目合理，則對高一學生並不困難；若題目不合理，則對高一或高二學生都一樣困難。學科中心將推薦各校定期考優良試題供參考。

Q15：「指對數函數」放在高一上學期，驟然跳到純符號的運算，是否會造成一般程度學生的學習困擾？

A15：

- (一)「指對數」在高一的化學、生物、地球科學等科目均會用到，放在高一

上的最後一章有助於其他學科的學習。

- (二)「指對數」的學習，是要經歷數與文字符號的反覆操作，才能具體掌握，不會驟然跳到純文字符號的形式操作，這是本課綱設計的基本精神。「指對數函數」之前的章節，包括「數與式」、「多項式函數」、「等比數列」，也都有數與文字符號的循序漸進之反覆訓練，逐步建立學生抽象化的能力，應不致造成學生的學習困擾。

Q16：在介紹數系時，為何不一併介紹複數系？

A16：

- (一)數系部分只介紹有理數系與實數系，這時主要是把數視為度量的記號，背後的具體物件是數線。在此階段，由多項式產生的複數都不宜進入，以免干擾到實數的學習。舉例來說， $\sqrt{2}$ 作為度量的記號是代表邊長為1的正方形的對角線長。在學生學習實數的根式運算時，要學 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}(a,b\geq 0)$ ，此時若同時又學複數的性質，如 $\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-2}\neq\sqrt{(-3)\cdot(-2)}$ ，學生常會混淆。
- (二)複數系的代數結構在多項式的章節裡介紹，複數的幾何意涵，則是較深的數學觀念，它展現代數與幾何的完美結合，要求較高的數學成熟度，放在高三較為適合。

Q17：為何要刪除整數系，這樣數系的學習是否會不完整？

A17：

整數系並未刪除，數學II之有限數學中需要整數的背景知識，相關之題材均在國中已學過，到高中時適度地延伸。但延伸之題材，比如最大公因數的表現定理、或不定方程的整數解，對大部分的學生並無需要，並且製造不必要的學習挫折，故予以刪除。

Q17-1：「數論」的題材在高中課綱中被弱化，是否會影響國際競爭力？

A17-1：

在高一數學(I)的「數與式」、高一數學(II)的「數列與級數」、「排列、組合」均有數論的相關題材，未將「數論」獨立成一章或一節作探討，是為了避免延伸出不必要的難題，打擊學生對數學的整體學習興趣。

Q18：條件機率、貝氏定理與最小平方法在 88 年標準與 95 課綱中社會組學生均不學習，為何現在要學？

A18：

條件機率與貝氏定理是大學管理、醫、農學院等學生所必備之題材，而這些題材也與生活相關。最小平方法是談迴歸直線，這是數據分析的重要內容，也幾乎為所有學科進行量化分析所必備之基礎。

Q19：為何要引進隨機變數與二項分布的題材？

A19：

- (一)生活中所接觸的變量常常具有隨機現象，這些具有隨機性（不確定性）的變量就稱作隨機變量（也叫隨機變數），老師可在教學活動中請同學舉出隨機變數的例子，不需用機率空間上的函數來嚴格定義。
- (二)事實上，「二項式展開」、「隨機變數」、「期望值與標準差」、「重覆實驗」、「二項分布」、「信賴區間」是一定的思想脈絡，沒有「隨機變數」與「二項分布」的概念，很難將思想脈絡交待清楚。
- (三)在許多學科的實際應用上，進行量化分析總難免有不確定因子，而二項分布是最簡單的不確定因子，其相關的數學內容也可以在高中交待清楚。學生未來進行計量分析，應在高中時認識到其背後最簡單形式的不確定因子。

Q20：二次曲線只留下 95 課綱之圓錐曲線的基本內容，刪除了光學性質的應用，是否違背課綱重視應用的精神？

A20：

圓錐曲線有許多問題在微積分的幫助下變得很簡單，如果在高中學習，就難免讓學生記憶許多不必要的公式。而且美國、中國、韓國等國家也都將上述光學性質的題材從高中課程刪除。

Q21：為何要刪除「球」的題材？

A21：

在高中階段，如果只談「球」的方程式，卻不談切平面、切線，或者球與平面、直線的關係，「球」的學習就會變得孤立而沒有意義。但如果要談球與直線、平面的關係，份量又太重。因此決定將「球」留待大學微積分課程處理。

Q22：為何「輾轉相除法」只在附錄出現？

A22：

依現行課程的安排方式，輾轉相除法是放在數系中的整數單元，很容易延伸出不定方程式等不必要的難題，置於附錄讓程度好或有興趣的學生仍可學習到。

Q23：在數學 I 之第 1 章中，為何將 $\sqrt{2}$ 為無理數的證明置於附錄而不置於正文？如果不提無理數的證明，要如何介紹無理數？

A23：

- (一)數學學習的過程，應在直觀與嚴謹之間取得平衡，有些課題剛開始學時，只需直觀的說明而不必一開始就要要求嚴謹的證明，以免許多學生因嚴謹證明的障礙，連基本的直觀都無法建立。

(二) $\sqrt{2}$ 為無理數的發現，固然是數學史上的重要里程碑，但其證明並不是高一學生要強調的能力，所以放在附錄中作為延伸的學習。

(三)教師也可以講授置於附錄的證明，只是該題材不屬於正式評量的範圍。

Q24：本次數學科課程綱要修訂的程序為何？

A24：

本次高中數學科課程修訂的前置研究階段從 93 年 6 月起步，以「十二年一貫」的觀點，詳細檢視現行數學課程的「一貫性」、「銜接性」與「妥適性」，與六個地區（美國加州、新加坡、英國、日本、韓國、中國北京）的課綱做比較，製成「中小學數學科課程綱要評估與發展研究」報告，提出數學課程之連貫與統整的建議，並檢視數學與其他學科之關聯，整理其他學科所需的數學知識與需要的時間點。前置研究與數學學科中心對於高中數學課程 95 課綱所蒐集的意見，全部提供給課綱修訂小組作為修訂的基礎文件。小組於 95 年初召集，95 年 4 月 1 日正式啟動，其委員包括數學子領域代表、九年一貫數學領域課綱代表、師範大學代表、教育心理或數學教育代表、高中教師代表，力求涵蓋周全與均衡。小組歷經十九次會議，至 96 年 4 月 30 日擬定草案初稿後，開始公共參與階段，由數學學科中心設置網路意見回饋管道，並在北、中、南區共同舉辦五場焦點座談與三場公聽會。依據回饋意見之彙整分析，在綱要內容的修訂、審查與再修訂之程序後，報教育部核定並公告之。

Q25：95 課綱數學科的授課時數嚴重不足，本次綱要修訂是否有增加時數？

A25：

(一)必修課時數在這次課程綱要修訂中很難調整，因此內容的酌刪是必要的。

(二)選修課時數有適度增加，如高三選修數學（數甲）的時數從 3 小時增加為 4 小時，而內容亦有所調整，高三教材的份量應該算適中。

(三)在選修數學中，各年級均有規劃選修題材，可供數學教師爭取時數。

Q26：修訂課程在實施前會不會進行實驗，如果沒有實驗如何保證修訂課程的走向是正確的？

A26：

(一)因為牽涉到升學考試，客觀的實驗很難進行，目前教育部並未規劃課綱實驗。

(二)本次課程的修訂過程包含三年的準備期，進行了多項研究，包括《中小學數學科課程綱要評估與發展研究》與《12、15、18 歲數學科能力指標》並多方蒐集回饋意見。在教育部未規劃課綱實驗的情況下，課綱修訂小組已盡力作好事前研究及公共參與工作。

Q27：新課綱實施如何導正數學學習文化？

A27：

- (一)新課綱強調數學的學習要重視數學思考，要掌握數學化繁為簡與以簡馭繁的精神。
- (二)為導正學習文化，具體的作法是在實施全國性測驗評量時，應提供學生充分的思考時間，以避免學生為求快速解答而忽略數學思考的學習。同時題數不宜太少，以免為求鑑別度而將題目導引到難題化。程度上應從基礎題到進階題均勻分布。相關評量單位應研究優良題型的評鑑指標，協助教學現場創造出優質的學習環境。

Q28：課綱似乎在選修數學中才介紹函數的定義，如此安排，在一年級時如何介紹多項函數、指對數函數？又，在沒有直角坐標系的基礎下，如何進行函數圖形的教學？

A28：

- (一)在九年一貫綱要數學科的分年細目中，包含函數、直角坐標系與函數圖形有下列條目：

7-a-09 能認識函數。

7-a-10 能認識常數函數及一次函數。

7-a-11 能理解平面直角坐標系。

7-a-12 能在直角坐標平面上描繪常數函數及一次函數的圖形。

9-a-02 能描繪二次函數的圖形。

99 課綱從未提在第一冊不定義函數，事實上，在課綱的 p.52 中 1.1 介紹函數 $y = f(x)$ 的符號及一次、二次函數的圖形，在多項函數、指對數函數的引進中，也分別介紹定義域、值域的觀念。選修數學中則有函數的統整學習，再次以抽象方式統整介紹函數的概念，複習過去所學過的基本函數，並延伸列更多的函數，如根式函數、分片函數等。

- (二)在 95 暫綱中，高一的平面坐標系與複數平面的內容涉及許多直線的問題，與函數圖形無關，因此這塊定位為坐標幾何，置於數學Ⅲ之幾何體系（包括三角、坐標幾何、向量幾何），較為完整。

Q29：第 2 冊有 4 章，定期考有 3 次，考試範圍不易切割，且各校切割方式不一，造成家長疑慮，是否可由上而下規範出一致的考試範圍？課綱內容是否可作較細的劃分，俾利各校定期考劃分考試範圍。

A29：

- (一)實際教學進度可視各校實際情形作調整，並不需要拘泥於課綱的章節。各校定期考次數與範圍亦不宜作統一硬性規定。
- (二)課綱的層次分為主題、子題、內容，其中內容已更進一步條列相關數學

知識細目，各校定期考範圍可視各自使用教材中區分章、節、小節的情況自行安排。

Q30: 為何刪除平面坐標系、直線斜率、兩直線垂直條件？

A30：

- (一)平面坐標系並未刪除，而是從第 1 冊移至第 3 冊。在 95 暫綱中，高一的平面坐標系與複數平面的內容涉及許多直線的問題，與函數圖形無關，99 課綱將平面坐標系定位為坐標幾何，置於數學 III 之幾何體系（包括三角、坐標幾何、向量幾何），較為完整。
- (二)第 1 冊的主題為函數，因此相關的一次函數重點為斜率、變化率之意涵，並非坐標平面上的直線方程式。
- (三)在第 1 冊第 3 章，指對數函數圖形關於直線 $y=x$ 對稱之說明，建議採圖形的直觀方式處理。

Q31: 為何把插值多項式納入新課程？為何要學習 Lagrange 插值多項式？特別是，既然插值多項式可用牛頓法或解聯立方程法求出，為何還要學 Lagrange 插值法？

A31：

- (一)引進插值多項式的主要目的是將多項式之學習圖像化，建立函數圖形與其代數式的連結。在 2.1 節中以描點方式繪一次、二次以及單項式函數的概略圖形，在 2.2 節中則學習在給定幾個點的情況下，找出其對應的插值多項式。
- (二) $f(x)$ 除以 $(x-a)(x-b)$ 的餘式，就是通過 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 的一次插值多項式，這是用簡單多項式在特定區域 $[a, b]$ 裡近似一般多項式函數，插值法可作為除法的應用，亦表現出數學化繁為簡的精神。
- (三)牛頓插值多項式可與餘式定理連結，拉格朗日多項式可與因式定理連結，因此，插值多項式的題材提供了多項式除法的應用。
- (四)一次的插值多項式可與分點公式連結，也與指對數函數、三角函數之查表學習連結。
- (五)觀測的數據通常是離散的，在應用上常常以多項式函數連接起來。
- (六)數學學科中心將持續蒐集或研發相關教材與試題，協助教師教學與評量。

Q32: 有些概念(如直線斜率、函數奇偶性等)在高一階段僅輕描淡寫，學習的結果是無法消化吸收，將來仍需從頭建立概念。直角坐標系在第 3 冊才正式出現，但在第 2 冊談迴歸直線時就會用到，不得不預先介紹直角坐標系。像這兩個例子，同樣的概念不斷重複教是否有必要？感覺上沒有效率。

A32：

- (一) 教師對傳統的塊狀式教材較為習慣，教起來也方便，但應考慮到學生的學習心理與學習效果。原則上，塊狀學習要求學生在短時間學習完整概念，效果通常不如螺旋式的學習，螺旋式的學習步調較為緩慢有助於消化吸收，且提供學生重新審視、重新認識的機會。
- (二) 第 1 冊的主軸是函數，線型函數單元的重點是直線的斜率，也就是變化率或陡峭程度。為使學生專注於函數面向，此處不宜談直線的幾何面向，以免衍生太多問題，幾何面向留待第 3 冊討論較為適合。
- (三) 談函數奇偶性的目的在於簡化問題，只需考慮部分圖形即可完成全部圖形，實際教學宜配合具體函數進行教學。
- (四) 最小平方法所涉及的只有一次函數與二次函數的配方法。

Q33: 不明白為何要學生學習信賴區間，雖然自己看了統計的書，還是很擔心自己的理解並不正確。目前課本所提供的例題，也看不出統計教學的目的，有些考題似乎只淪落到背公式與根號計算。

A33：

- (一) 推論統計在生活上有廣泛的應用，學生在實際生活中經常會接觸到，世界各國亦將推論統計納入高中課程。
- (二) 高中程度的統計推論只介紹“ n 次獨立且成功機率為 p 的白努利試驗”下，利用樣本平均值估計 p 之統計方法。此處介紹之估計方法的理論依據係引用機率論中之大數法則與中央極限定理。要介紹中央極限定理，就需要引入常態分布。此部分僅做通識性的介紹，可以活動、範例或圖形等方式呈現，來建立學生對於中央極限定理的直觀。

茲以選舉的抽樣調查為例，說明如何介紹如何利用樣本平均值來做某一議題或候選人支持率之估計。

假設某選區有 N 個選民(母體)，支持某一候選人的比例為 p 。現在用簡單隨機抽樣法，抽出 n 個選民(樣本)，調查其支持該候選人的比例 \hat{p} ，用以估計母體比例 p 。

我們可以想像抽樣過程就如同在袋中取球的過程。袋中有 N 顆球，支持該候選人標為紅球，其比例為 p ，其餘標為白球。每次隨機抽出一個選民調查其對該候選人的支持情況等同於在袋中隨機抽出一球查其顏色。假設母群體樣本數 N 夠大，且樣本數 n 除以 N 的比例 n/N 之比值很小，則取出放回與取出不放回對支持度的調查差距不大，因此我們可以把每一個個別抽樣調查視為一白努利試驗，一組 n 個樣本點的抽樣調查視為

n 次獨立的白努利試驗。設 X 為 n 次試驗中所得紅球的個數，則由前面的說明知可將 X 視為遵循二項分布。令 $\bar{X} = X/n$ ，即樣本平均，它的期望值為 p ，標準差為 $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ 會隨著 n 變大而變小。因此

「當 n 夠大， \bar{X} 接近母體平均數 p 的機率很大」

，此即為大數法則。

在將樣本 \bar{X} 標準化後，即令 $Y = \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}}$ ，當 n 夠大時，其分布會近

似於標準常態分布(中央極限定理)。若以 Z 表一具有標準常態分布之隨機變數，我們可以用 Z 的分布來估計 \bar{X} 的分布。由微積分的計算知 $P(|Z| \leq 2) \approx 0.95$ 。因此

$$P(|\bar{X} - p| \leq 2\sqrt{p(1-p)/n}) = P(|Y| \leq 2) \approx P(|Z| \leq 2) \approx 0.95。$$

當我們進行抽樣時，得到支持比例 \hat{p} 值，我們說：「有 95% 的機會， $|\hat{p} - p|$ 的誤差在 $2\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}$ 範圍之內」。注意，在標準差的公式中，我們用 \hat{p} 取代 p ，這是因為在抽樣調查中，我們僅得到 \hat{p} ，並不知道母體平均 p ，但由大數法則知 \hat{p} 接近 p 的機率很大，因此在標準差的公式裡，我們用 \hat{p} 取代 p 。我們把 $[\hat{p} - 2\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}, \hat{p} + 2\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}]$ 稱作信賴區間。並將 $P(|\bar{X} - p| \leq 2\sqrt{p(1-p)/n}) \approx 0.95$ 解讀為「有 95% 的信心水準 p 會落在 $[\hat{p} - 2\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}, \hat{p} + 2\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}]$ 之內」。

協助學生對於上述理論之理解，可以下面操作方式為之。對一固定的信心水準，給出信賴區間公式，再讓學生以亂數表模擬或實驗投擲正面出現機率為 p 的銅板 n 次，代入信賴區間公式，以說明信心水準的意涵；並以此解讀，何以大多數的學生所得的信賴區間會涵蓋 p ？

Q34: 第 2 冊內容太多，教不完。

A34 :

(一)各校教學時數與實質教學內容不一，若將傳統「排列組合」單元所講授的內容作適當刪減應可順利完成教學進度。

Q35: 第 4 冊內容太多，教不完。

A35 :

(一)第 4 冊若只講授 A 版部分(不含◎的部分)，則教學時數應足夠。B 版部分待蒐集實際教學意見再進行檢討。

Q36: 數學歸納法對高一學生太難，約有一半的學生無法學會。特別困難的地方在於從 k 到 k+1 的論證過程。

A36 :

(一)數學歸納法的困難點通常出現在證明，但教學上應強調由歸納中發現規律而非僅在證明部分。此外，含不等式的數學歸納法已移至數學甲(II)或數學乙(II)的「數列及其極限」討論，應較 95 課綱簡單。

Q37: 建議將常用數學符號於第 1 冊第 1 章作介紹。

A37 :

(一)只介紹符號而沒有具體內容會使得數學顯得枯燥無趣，此部分不需列入課綱，由教科書或教師自行安排即可。

Q38: 建議將函數的凹凸性延後學習，因為缺乏應用。

A38 :

(一)算幾不等式 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ 等價於 $\frac{\log a + \log b}{2} \leq \log\left(\frac{a+b}{2}\right)$ ，等式成立於 $a=b$ 。也就是算幾不等式等價於對數函數的凹凸性，此處只需作直觀介紹，不用嚴格證明。

Q39: 「多項式的應用」的教學內容太多。

A39 :

(一)與 95 課綱相比較，多項式的應用新增插值多項式，但 99 課綱已將輾轉相除法移至附錄，整體而言多項式單元的教學份量與過去相當。

Q40: 現行課綱對於未來 12 年國教免試入學的學生是否太難？特別是校內學生程度落差將更趨明顯，分組教學如何進行，分組成績如何比較？

A40 :

(一)99 課綱在設計時已將 12 年國民教育納入考量，課程內容已刪減多(請參

見 A13 課綱與暫綱差異之說明)。其次為考量 10 年級(高一)課程內容以全體學生共通性課程為主，將教材順序作了適當調整。高一數學(數學 I, II)定位為與生活關聯或其他學科需要用到的數學，以建立學生在各學科進行量化分析所需要的基礎。

(二)在課綱的「伍、實施要點」之「二、教學進度」，對於學生程度落差的情形提供以下彈性教學之建議：

各校可配合學生學習情況，彈性調整教學進度。針對放棄學習的學生，應予適當的輔導。針對學習較慢的學生，應有以下補救措施：可依學習不足狀況開設基礎數學選修課程；可彈性調整學習進度，只要在學測前學完數學必修課即可；學習方式可採螺旋式，不一定要按課綱的章節順序學習；可依實際狀況彈性調整評量方式。針對學習較快的學生，則可提供進階選修課程，以激發其學習熱忱。

Q41: 四分位距只有部分版本的教科書有提及，是否可以不教？

A41：

(一)四分位距屬於國中數學課程的範圍，高中數學教師可視情況為學生複習。至於大學入學考試的測驗內容若包含國中小數學課程則並無不可。

Q42: 綜合高中一年級與高職課程二年級的課程無法銜接(例如，高職課程將三角安排在高一，但高中課程將三角安排在高二)，應如何照顧從高中轉換軌道至高職的學生權益？

A42：

(一)依據教育部 100 年 6 月 2 日臺技(一)字第 1000083984B 號函，綜合高中學生課綱銜接問題之處理原則如下：

1. 建請學校應斟酌二年級分化後學術與專門學程孰多，作為考量一年級數學科教科書抉擇因素，再針對少數學生進行補充或輔導教學。
2. 建請學校應針對學生需求，發揮課程發展委員會之功能，適度調整學年或學期間各冊別之章節順序。
3. 如需超支鐘點費，由綜合高中經常門補助經費支應。