

除雪機問題

有一天天空穩定地下著雪，一部除雪機於中午開始除雪，觀察到除雪機在第一個小時和第二個小時內分別除了一哩及兩哩的雪，問雪何時下？

這並不是一個“純的”數學問題，必須進行一些滿足現實及物理的假設，再用數學推導出合於現狀的結果，換言之，在這個問題之中，如果你同意“雪愈深，除雪機移動地愈慢”的話，並假設除雪機以每小時 k 立方哩的速率清除，記 t 是以小時為單位，以中午為 $t = 0$ ， x 是在時間 t 時雪的深度， y 是在 t 時除雪機移動的距離， w 是除雪機的寬度，則那句話寫成數學式會是：

$$wx \frac{dy}{dt} = k$$

當中 x 是和 t 有關，令 t_0 是開始下雪到中午的那段時間， s 是雪每小時增加的深度(由題意， s 是常數)，則當 $t > -t_0$ 時， $x = s(t + t_0)$ ，所以 $\frac{dy}{dt} = \frac{k}{ws} \cdot \frac{1}{t+t_0} \Rightarrow y(t) = \frac{k}{ws} [\log(t + t_0) + C]$ ，其中 C 是常數。

因為 $t = 0$ 時 $y = 0$ ，得到 $C = -\log t_0$ ，所以 $y(t) = \frac{k}{ws} \log(1 + \frac{t}{t_0})$ ，再則 $y(1) = 2$ ，及 $y(2) = 3$ ，得到 $(1 + \frac{2}{t_0})^2 = (1 + \frac{1}{t_0})^3$ ，展開後有 $t_0^2 + t_0 - 1 = 0$ ， $\therefore t_0 > 0 \therefore t_0 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \doteq 0.618(\text{hrs}) \doteq 37(\text{mins})$ ，
 \Rightarrow 雪於 11:23 AM 開始下。

除雪機問題示意圖：

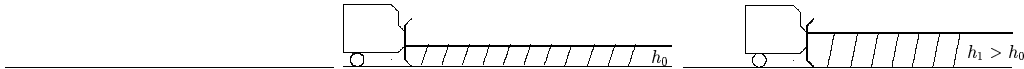
某時某刻開始下雪

正午時分 $t = 0$ 積雪厚 h_0

雪繼續下，厚度愈厚

除雪機開始除雪

除雪機愈難前進



第一個小時除雪機走了2 miles.

第二個小時又走了1 miles.

